**Prof. Guido Sweers** **SS 2008**
**Matthias Erven**

**Funktionentheorie**
**Übungsblatt 12**

Diese Hausaufgaben werden am 03.07.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

**Aufgabe 1.** Für $r \in (0,1)$ sei der Kreisring $A_r = B_1(0) \backslash \overline{B_r(0)}$ definiert. Sei $h$ eine biholomorphe Abbildung von $A_r$ nach $A_R$ mit $0 < r \leq R < 1$, die stetig und bijektiv ist von $\overline{A_r}$ nach $\overline{A_R}$ . Zeigen Sie, dass $r = R$ gilt, und vollziehen Sie dazu die folgenden Schritte:

1. Zeigen Sie, dass $h(\partial A_r) = \partial A_R$.
2. Zeigen Sie:
$$\begin{aligned} \text{Entweder ist}\quad & h(\partial B_1(0)) = \partial B_1(0) \text{ und } h(\partial B_r(0)) = \partial B_R(0), \\ \text{oder es ist}\quad & h(\partial B_1(0)) = \partial B_R(0) \text{ und } h(\partial B_r(0)) = \partial B_1(0). \end{aligned}$$
3. Im zweiten Fall erhält man für $f \circ h$ mit $f(z) = \frac{R}{z}$ den ersten Fall.
4. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass der erste Fall zutrifft und betrachten die Funktion
$$(x,y) \mapsto \ln r \ \ln|h(x+iy)| - \ln R \ \ln|x+iy|\,.$$
Zeigen Sie, dass diese Funktion harmonisch ist.
5. Zeigen Sie, dass diese Funktion 0 ist für $x + iy \in \partial A_r$.
6. Aus dem Maximumprinzip folgt dann ..... .
7. Wenn
$$\ln r \ \ln|h(x+iy)| - \ln R \ \ln|x+iy| = 0,$$
kann man diese Funktion fortsetzen durch 0 auf $\mathbb{C}$. Weil man die holomorphen Funktionen kennt, die $\ln|h(x+iy)|$ und $\ln|x+iy|$ als Realteil haben, nämlich $\mathrm{Log}_1(h(z)) + ic_1$ und $\mathrm{Log}_2(z) + ic_2$ mit $c_i \in \mathbb{R}$ und geschickt gewähltem Schnitt in den Logarithmen, folgt
$$\ln r\ \mathrm{Log}_1(h(z)) - \ln R\ \mathrm{Log}_2(z) = i\hat{c}.$$
Wählen Sie den Schnitt $z \mapsto \mathrm{Log}_1(h(z))$ und $z \mapsto \mathrm{Log}_2(z)$ an der gleichen Stelle, und weil die Kombination stetig sein muss, folgt ..... .

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie Lemma 11.5. Ist die Menge $\{f : U \to \mathbb{C}; f \text{ meromorph}\}$ ein Körper?

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie für $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{i)}\ \left(\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2} - n\right)^2} \qquad \text{ii)}\ \pi\tan(\pi z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{z - \frac{1}{2} - n} + \frac{1}{\frac{1}{2} + n}\right)$$

**Aufgabe 4.** Verwenden Sie den Satz von Rouché, um einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra zu erbringen.
*Hinweis:*Zeigen Sie, dass ein Polynom vom Grade $n$ genau $n$ Nullstellen (gewichtet mit der jeweiligen Vielfachheit) besitzt, indem Sie $z \mapsto z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ mit $z \mapsto z^n$ auf $B_R(0)$ mit genügend großem $R$ vergleichen.