Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **SS 2008**

Funktionentheorie
Übungsblatt 2

Diese Hausaufgaben werden am 17.04.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. [*] Sei $f(z) = x^3y^2 + ix^2y^3$ für $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$. Bestimmen Sie alle z_0, an denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Beweisen Sie Summen-, Produkt- und Kettenregel, also

- $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$,
- $(f.g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$,
- $(f \circ g)'(z) = (f' \circ g)(z).g'(z)$.

Wieso ist

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to z} \frac{(f\circ g)(w) - (f\circ g)(z)}{w-z} &= \lim_{w\to z} \frac{(f\circ g)(w) - (f\circ g)(z)}{g(w)-g(z)} \frac{g(w)-g(z)}{w-z} = \\
&= \lim_{w\to z} \frac{(f\circ g)(w) - (f\circ g)(z)}{g(w)-g(z)} \lim_{w\to z} \frac{g(w)-g(z)}{w-z} = \\
&= \lim_{u\to g(z)} \frac{f(u) - f(g(z))}{u-g(z)} \lim_{w\to z} \frac{g(w)-g(z)}{w-z} = f'(g(z)).g'(z)
\end{aligned}$$

so nicht richtig?

Aufgabe 3. Für welche $z \in \mathbb{C}$ sind folgende Funktionen $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, 5$ komplex differenzierbar? Geben Sie dort die Ableitung an!

$$f_1(z) = z^{125} \qquad f_2(z) = |z|^{125} - |z|^{33}$$

$$f_3(z) = \mathrm{Re}(z)^3 + i\mathrm{Im}(z) \qquad f_4(z) = 2\mathrm{Arg}(z) - i\ln(z\overline{z})$$

$$f_5(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4. [*] Zeigen Sie: Gilt für eine komplex differenzierbare Funktion f, dass $f(z) \in \mathbb{R}$ liegt für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

(bitte wenden)

[*] Für diese Aufgabe gibt es 2 Punkte.

Aufgabe 5. Eine differenzierbare Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist invertierbar, wenn $f' \neq 0$. In $\mathbb{C}$ gilt so etwas nicht. Als Beispiel betrachten wir die Funktion exp.

1. Zeigen Sie, dass $\exp'(z) \neq 0$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$.
2. Zeigen Sie, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $2\pi i$ -periodisch ist.
3. Wählen Sie eine geschickte Teilmenge A von $\mathbb{C}$ derart, dass $\exp_{|A}$ invertierbar ist. Berechnen Sie die zugehörige Inverse.

Aufgabe 6. Skizzieren Sie jeweils in der Gauß-Ebene die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

1. $\operatorname{Arg}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}\pi$.
2. $|z+2| = 2\,|z-1|$.