Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2008

Funktionentheorie
Übungsblatt 3

Diese Hausaufgaben werden am 24.04.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine überall reell differenzierbare Funktion.

1. Zeigen Sie: Wenn f nicht injektiv ist, dann gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $f'(\xi) = 0$.

Daraus kann man schließen, dass f eine Inverse besitzt, falls $f'(x) \neq 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Im Komplexen ist dieser Schluss nicht möglich.

2. Geben Sie ein Beispiel für eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion g an, für die $g'(z) \neq 0$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ und die trotzdem nicht invertierbar ist.
3. Wieso ist dies kein Widerspruch zu Proposition 2.3?

Aufgabe 2. Mit den Mitteln aus Analysis I lässt sich $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ nur berechnen, wenn man bereits weiß, dass arctan eine Stammfunktion zum Integranden ist. Im Folgenden wird eine konstruktive Methode zur Integration entwickelt. Sei dazu $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Berechnen Sie $\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
2. Berechnen Sie $\frac{d}{dx}\mathrm{Log}\,(x-i)$.
3. Führen Sie eine Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x^2+1}$ durch und bestimmen Sie Stammfunktionen der Summanden.
4. Zeigen Sie, dass sich die von Ihnen so erhaltene Stammfunktion von $\frac{1}{x^2+1}$ nur durch eine Konstante von $\arctan x$ unterscheidet.

Aufgabe 3. Es gilt $e^{2\pi i} = 1$, also auch $e^{2\pi n i} = 1$ für $n \in \mathbb{Z}$, und folglich $e^{1+2n\pi i} = 1 \cdot e = e$ und $e^{1-4n^2\pi^2+4n\pi i} = \left(e^{1+2n\pi i}\right)^{1+2n\pi i} = e^{1+2n\pi i} = e$. Wegen $e^{1+4n\pi i} = e$ ergibt sich daraus $e^{-4n^2\pi^2} = 1$, also $1 = e^{4n^2\pi^2}$ und somit $e = 1^{\frac{1}{4n^2\pi^2}} = 1$. Was ist hier los?

Aufgabe 4. Gegeben sei die gebrochen-lineare Transformation $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Wie sehen die Bilder der folgenden Mengen unter f aus? Zeichnen Sie die Bildmengen jeweils in ein Koordinatensystem und begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re} z = 1\}$
2. $\{z \in \mathbb{C}; |z-2| = 1\}$
3. $\{z \in \mathbb{C}; |z-i| = 1\}$
4. $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re} z = \mathrm{Im} z\}$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die gebrochen-lineare Transformation, für die gleichzeitig gilt

$$2 \mapsto \infty, \quad i \mapsto 0 \text{ und } \infty \mapsto 1.$$