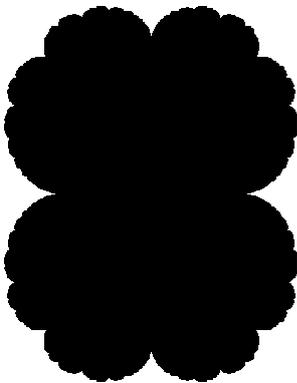


Funktionentheorie
Übungsblatt 4

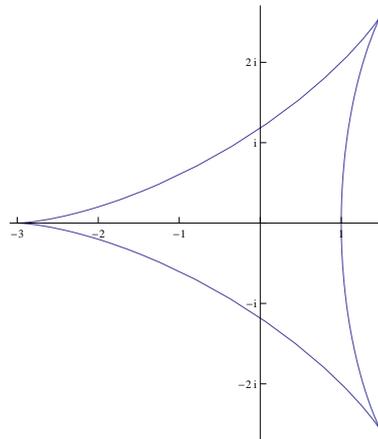
Diese Hausaufgaben werden am 02.05.08 um 09:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Sei $p(z) = z^2 + \frac{1}{4}$. Für den Startwert $z_0 \in \mathbb{C}$ sei rekursiv die Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ definiert durch $z_{n+1} = p(z_n)$. Zeigen Sie:

1. Gilt $|z_0| \geq \frac{7}{4}$, so divergiert die Folge.
2. Gilt $|z_0| \leq \frac{1}{2}$, so ist die Folge beschränkt.



zu Aufgabe 1



zu Aufgabe 2

Aufgabe 2. Gegeben sei die Kurve $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ mit

$$x(t) = 2 \cos(t) - \cos(2t),$$

$$y(t) = 2 \sin(t) + \sin(2t).$$

Ist γ differenzierbar / glatt / einfach / geschlossen / eine Jordan-Kurve?

Aufgabe 3. Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Berechnen Sie für $\gamma_\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_\alpha(t) = t + it^\alpha$ die Integrale

$$\int_{\gamma_\alpha} \operatorname{Re}(z) dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_\alpha} z^2 dz.$$

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} z^n dz.$$

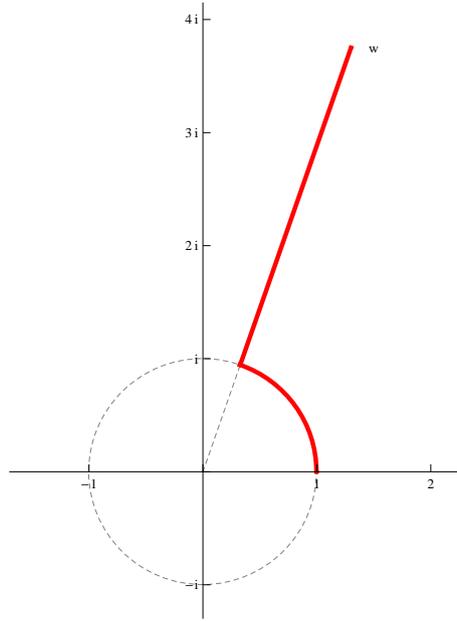
(bitte wenden)

Aufgabe 5. Für $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sei γ_w eine stückweise glatte Kurve, die 1 mit w verbindet durch den kürzesten Weg über den Kreisbogen mit Radius 1 um O und die Gerade von $w/|w|$ nach w (s. Abb. 2). Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_w} \frac{1}{z} dz = \text{Log}(w).$$

Zeigen Sie auch, dass für $\zeta_w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\zeta_w(t) = (1-t) + tw$ gilt

$$\int_{\zeta_w} \frac{1}{z} dz = \text{Log}(w).$$



zu Aufgabe 5