

Funktionentheorie
Übungsblatt 5

Diese Hausaufgaben werden am 08.05.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1.

1. Ergänzen Sie:

- $\text{Log}(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$ ist eine Stammfunktion zu $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf .
- $\text{Log}^*(z) = \ln|z| + i(\text{Arg}(iz) - \frac{1}{2}\pi)$ ist eine Stammfunktion zu $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf .
- Für $z \in$ gilt $\text{Log}(z) = \text{Log}^*(z)$.
- Für $z \in$ gilt $\text{Log}(z) \neq \text{Log}^*(z)$.

2. Finden Sie eine Stammfunktion mit grösstmöglichem Definitionsbereich zu $z \mapsto \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}$.

Aufgabe 2. * Sei $z \mapsto f(z)$ holomorph auf $U \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ holomorph ist auf $\bar{U} := \{z \in \mathbb{C}; \bar{z} \in U\}$.

Aufgabe 3. Für $r > 0$ sei $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_r(t) = re^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z(z-1)} dz$$

für alle $r > 0$, an denen es definiert ist.

Aufgabe 4. Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{4} + \sin t} dt.$$

Hinweis: Versuchen Sie, das Integral auf die Form $\int_{\gamma} f(z) dz$ zu bringen, wobei γ der Weg ist, der einmal entlang von $\partial B_1(0)$ verläuft.

Aufgabe 5. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $(a_k)_{k=-m}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ den Konvergenzradius 4 hat. Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k dz.$$

Aufgabe 6. * Was ändert sich am Ergebnis von Aufgabe 5, wenn man längs $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = 2e^{it} - e^{-2it}$ integriert? Eine Skizze dieser Kurve findet man in Aufgabe 2, Blatt 4.

*Für diese Aufgabe gibt es 2 Punkte.