

Funktionentheorie  
Übungsblatt 5

Diese Hausaufgaben werden am 08.05.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

**Aufgabe 1.**

1. Ergänzen Sie:

- $\text{Log}(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$  ist eine Stammfunktion zu  $z \mapsto \frac{1}{z}$  auf  $\square$ .
- $\text{Log}^*(z) = \ln|z| + i(\text{Arg}(iz) - \frac{1}{2}\pi)$  ist eine Stammfunktion zu  $z \mapsto \frac{1}{z}$  auf  $\square$ .
- Für  $z \in \square$  gilt  $\text{Log}(z) = \text{Log}^*(z)$ .
- Für  $z \in \square$  gilt  $\text{Log}(z) \neq \text{Log}^*(z)$ .

2. Finden Sie eine Stammfunktion mit grösstmöglichem Definitionsbereich zu  $z \mapsto \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}$ .

**Aufgabe 2.** \* Sei  $z \mapsto f(z)$  holomorph auf  $U \subset \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass dann  $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$  holomorph ist auf  $\bar{U} := \{z \in \mathbb{C}; \bar{z} \in U\}$ .

**Aufgabe 3.** Für  $r > 0$  sei  $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $\gamma_r(t) = re^{it}$ . Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z(z-1)} dz$$

für alle  $r > 0$ , an denen es definiert ist.

**Aufgabe 4.** Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{4} + \sin t} dt.$$

*Hinweis:* Versuchen Sie, das Integral auf die Form  $\int_{\gamma} f(z) dz$  zu bringen, wobei  $\gamma$  der Weg ist, der einmal entlang von  $\partial B_1(0)$  verläuft.

**Aufgabe 5.** Für  $m \in \mathbb{N}$  sei  $(a_k)_{k=-m}^{\infty}$  eine Folge komplexer Zahlen, so dass die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  den Konvergenzradius 4 hat. Sei  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $\gamma(t) = e^{it}$ . Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k dz.$$

**Aufgabe 6.** \* Was ändert sich am Ergebnis von Aufgabe 5, wenn man längs  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = 2e^{it} - e^{-2it}$  integriert? Eine Skizze dieser Kurve findet man in Aufgabe 2, Blatt 4.

---

\*Für diese Aufgabe gibt es 2 Punkte.