Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2008

Funktionentheorie
Übungsblatt 6

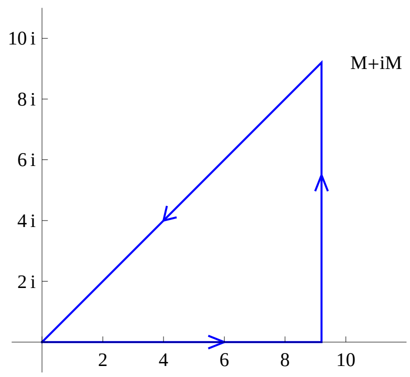
Diese Hausaufgaben werden am 21.05.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1.

1. Für $t \in [0, 2\pi]$ sei $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^5}\, dz.$$
2. Für $t \in [0, 2\pi]$ sei $\mu(t) = 4e^{it}$. Berechnen Sie
$$\int_\mu \frac{1}{\sin z}\, dz.$$
Hinweis: $\frac{z}{\sin z}$ läßt sich in 0 zu einer holomorphen Funktion fortsetzen.

Aufgabe 2. Sei P ein Polynom und γ eine stückweise stetig differenzierbare, linksherum laufende Jordan-Kurve, die durch keine Nullstelle von P verläuft. Zeigen Sie, dass
$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$$
die (mit der jeweiligen Vielfachheit gewichtete) Zahl der Nullstellen innerhalb von γ angibt.

Aufgabe 3. Berechnen Sie
$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx.$$
Betrachten Sie dazu $\int_\gamma e^{iz^2}\, dz$ längs des unten skizzierten Weges γ, lassen Sie $M \to \infty$ gehen und verwenden Sie, dass $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gilt.



Aufgabe 4. Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, und es gebe $M, \alpha \in \mathbb{R}^+$ mit
$$|f(z)| \leq M\, |z|^{-\alpha}.$$
Zeigen Sie: Es gibt $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ mit $n = [\alpha] = \max\{n \in \mathbb{N}; n \leq \alpha\}$ und eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion g, so dass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt
$$f(z) = c_n z^{-n} + c_{n-1} z^{1-n} + \cdots + c_1 z^{-1} + g(z).$$
Hinweis: Betrachten Sie $h(z) = z^{n+1} f(z)$.