Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2008

Funktionentheorie
Übungsblatt 7

Diese Hausaufgaben werden am 29.05.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=5} \frac{1}{\sin\left(1+\frac{1}{z}\right)}\,dz.$$

Aufgabe 2. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ die in Bild 1 skizzierte offene Menge und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien $z_1 \in U$ und $r_1 > 0$ so gewählt, dass $B_{r_1}(z_1) \subset U$ gilt. Nach Satz 6.2 lässt sich f um z_1 in eine Potenzreihe p_1 entwickeln. Diese habe einen Konvergenzradius $R_1 > r_1$. Sei ausserdem $U \cap B_{R_1}(z_1)$ zusammenhängend, wie es in Bild 2 dargestellt ist.

1. Zeigen Sie, dass $f(z) = p_1(z)$ gilt für alle $z \in U \cap B_{R_1}(z_1)$.

Also kann man f erweitern zu einer holomorphen Funktion $f_1 : U \cup B_{R_1}(z_1) \to \mathbb{C}$ durch

$$f_1(z) := \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in U \\ p_1(z), & \text{falls } z \in B_{R_1}(z_1) \setminus U. \end{cases}$$

Es gebe nun analog $z_2 \in U$ und $r_2 > 0$ und eine Potenzreihenentwicklung p_2 um z_2 mit Konvergenzradius $R_2 > r_2$, so dass sich f wie im Bild 3 angedeutet zu einer Funktion $f_2 : U \cup B_{R_2}(z_2) \to \mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Ausserdem sei $B_{R_1}(z_1) \cap B_{R_2}(z_2) \neq \emptyset$.

2. Stimmt es, dass $f_1(z) = f_2(z)$ gilt für $z \in B_{R_1}(z_1) \cap B_{R_2}(z_2)$?

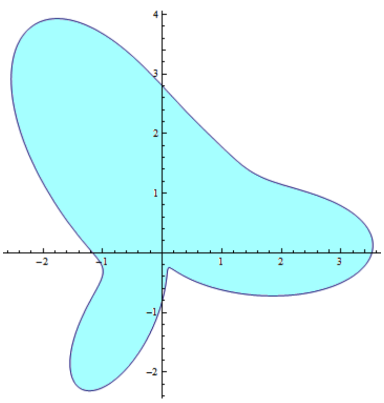

Bild 1

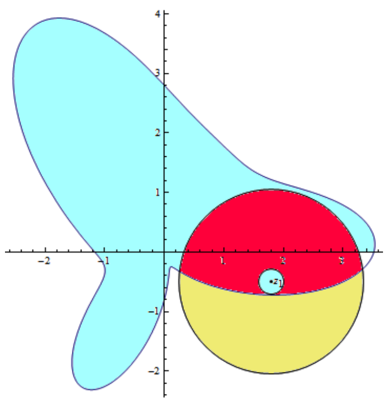

Bild 2

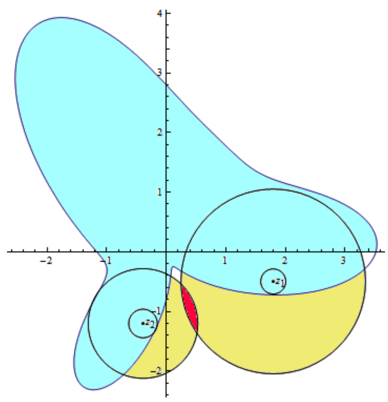

Bild 3

(bitte wenden)

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph.

1. Zeigen Sie: Gibt es ein $z_0 \in U$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist $f \equiv 0$ auf U.
2. Gilt die Aussage aus Teil 1. auch, wenn U nicht zusammenhängend ist?
3. Gilt die Aussage aus Teil 1. auch, wenn $U \subset \mathbb{R}$ und f nur reell differenzierbar ist?

Aufgabe 4.

1. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4^n} z^n := \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{1+4^n} z^n$$
wohldefiniert? Zeigen Sie, dass f holomorph ist auf dem Inneren des Definitionsgebietes.
2. Berechnen Sie
$$\oint_{|z|=2} f(z)dz.$$
3. Berechnen Sie den Konvergenzradius von
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (z-2)^n .$$
4. Geben Sie eine Stammfunktion auf größtmöglichem Gebiet an.

Aufgabe 5. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass für $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(f(z_0)) &\leq \max\{\mathrm{Re}\, f(z); z \in \partial B_r(z_0)\}, \\ \mathrm{Re}\,(f(z_0)) &\geq \min\{\mathrm{Re}\, f(z); z \in \partial B_r(z_0)\}. \end{aligned}$$

Informationen zu Fördermöglichkeiten

- **Begabtenförderung für Lehramtsstudierende durch das Studienkolleg/Stiftung der deutschen Wirtschaft**
  Informationstermin: 3. Juni 2008, 10-12 Uhr, Raum 18 der Humanwissenschaftlichen Fakultät
  Bewerbungstermin: 8. Juli 2008
  Bewerbungen an das Dekanat der Humanwissenschaftlichen Fakultät, z. Hd. Prof. K. Reich
  Informationen: www.sdw.org

- **Fullbright-Stipendien zum Studium in den USA im akademischen Jahr 2009-2010**
  Bewerbungsschluss: 20. Juni 2008
  Kontakt: Frau Carolin Weingart (gpu@fulbright.de)
  Informationen: www.fulbright.de