Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **SS 2008**

Funktionentheorie
Übungsblatt 8

Diese Hausaufgaben werden am 05.06.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. * Sei f holomorph auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $u(x,y) := \operatorname{Re}(f(x-iy))$ harmonisch ist auf $U_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 2.

1. Welche ganzen Funktionen f erfüllen $\operatorname{Re}(f(z)) \geq |z|$?
2. Welche ganzen Funktionen f erfüllen $\operatorname{Re}(f(z)) \geq \operatorname{Im}(f(z))$?

Aufgabe 3. * Sei f eine ganze Funktion, die die folgende Bedingung erfüllt: Es gibt $M \in \mathbb{R}^+$ derart, dass $|f(z)| \leq M\sqrt{|z|}$ gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z \geq 0$. Gilt $f \equiv 0$?

Aufgabe 4. Sei f eine ganze Funktion, die die folgende Bedingung erfüllt: Es gibt $M \in \mathbb{R}^+$ derart, dass $|f(z)| \leq M$ gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z \geq 0$. Ist f konstant?

Aufgabe 5. Sei $O \subset \mathbb{R}^2$ offen. Für eine reell analytische Funktion $u : O \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$v(z,\bar{z}) := u\left(\tfrac{z+\bar{z}}{2}, \tfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

1. Zeigen Sie formal, dass gilt:
$$\Delta u(x,y) = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v(z,\bar{z})$$
2. Wir betrachten nun z und $\bar{z}$ als unabhängige (reelle) Variablen. Zeigen Sie formal, dass sich die Lösung von
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v(z,\bar{z}) = 0$$
schreiben lässt als
$$v(z,\bar{z}) = f(z) + g(\bar{z}).$$
3. Wie sieht dann die formale Lösung aus von
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v(z,\bar{z}) = 0?$$

Aufgabe 6. Finden Sie harmonische Funktionen $u_i : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$, die folgende Randbedingungen erfüllen:

1. $u_1(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos\varphi$ für $\varphi \in [0,2\pi]$;
2. $u_2(\cos\varphi, \sin\varphi) = \sin\varphi$ für $\varphi \in [0,2\pi]$;
3. $u_3(\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\varphi)^3 - 3\cos\varphi(\sin\varphi)^2$ für $\varphi \in [0,2\pi]$;
4. $u_4(\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\varphi)^3$ f ür $\varphi \in [0,2\pi]$.

---

*Für diese Aufgabe gibt es 2 Punkte.