Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2012

Funktionentheorie
Aufgaben der Klausur vom 25.7.2012

1. Welche dieser Funktionen sind analytisch?

   (a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$.

   (b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \begin{cases} \dfrac{|z|^2}{\bar{z}} & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0. \end{cases}$

   (c) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h(z) = \sin(\bar{z}) + i \sinh(i\bar{z})$.

2. (a) Ist die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2,$$
   harmonisch?

   (b) Gibt es eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass gilt
$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))?$$
   Wenn ja, welche? Wenn nein, wieso nicht?

3. Gebrochen-lineare Funktionen haben die Form
$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$
   mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ und $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

   (a) Bestimmen Sie eine gebrochen-lineare Funktion $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, die den Kreisrand $\partial B_1(0)$ auf die reelle Achse $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$ abbildet.

   (b) Ist diese Abbildung eindeutig bestimmt?

   (c) Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $h : B_1(0) \to \mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ an.

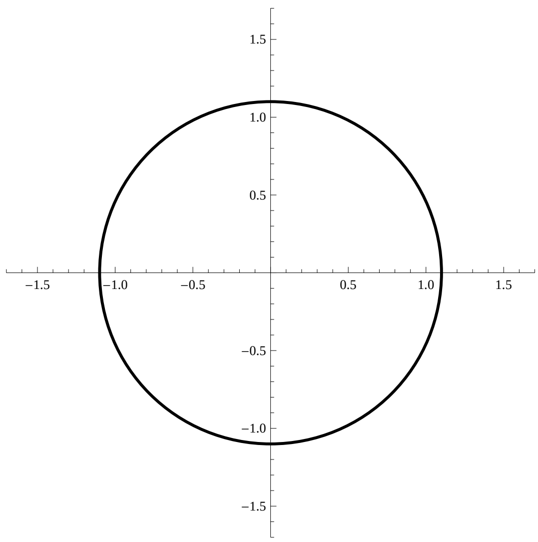
4. Sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine Funktion.

   (a) Wann nennt man diese Funktion meromorph?

   Wir betrachten nun die Funktion $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$, die gegeben ist durch
$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\sin(\pi z^2)}.$$

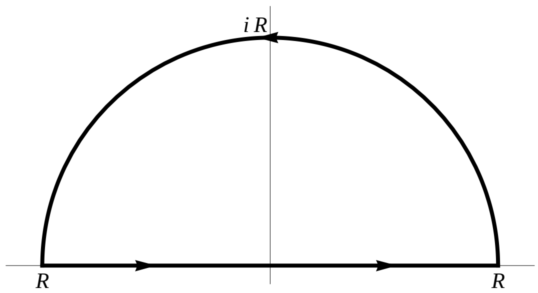
   (b) Ist f meromorph?

   (c) Für $t \in [0, 2\pi]$ sei $\gamma(t) := \frac{11}{10} e^{it}$. Berechnen Sie
$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$



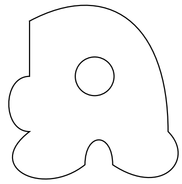
5. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$



Hinweis: Betrachten Sie $\int_\gamma \frac{1}{1+z^4} dz$ längs des rechts skizzierten Weges γ und lassen Sie $R \to \infty$ gehen.

6. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.



   (a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\gamma : [0,1] \to U$ eine Jordankurve, die ganz in U verläuft. Dann ist $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

   (b) Für $M = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$ gibt es eine nicht-konstante ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die M als Nullstellenmenge hat.

7. (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i^n}{1+5^n} z^n := \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-m}^{m} \frac{i^n}{1+5^n} z^n$$

   wohldefiniert? Zeigen Sie, dass f holomorph ist auf dem Inneren des Definitionsgebietes.

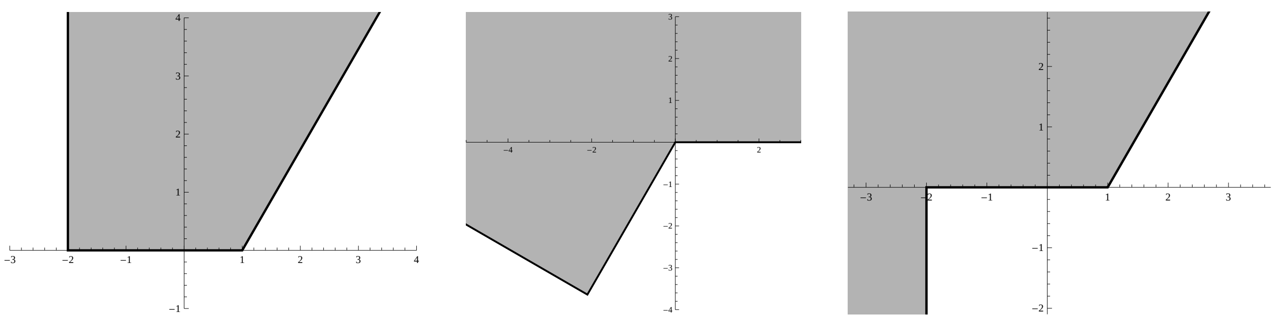
   (b) Berechnen Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (z-2)^n .$$

8. Es sei $f : \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\,(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$f'(z) = (z+2)^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{\frac{1}{3}} .$$

Welche der folgenden Skizzen zeigt das Bild von f? Begründen Sie Ihre Antwort.



9. Wir betrachten
$$f_n(z) = z^2 \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^4}{\pi^4 k^4}\right).$$

   (a) Zeigen Sie, dass $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ existiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

   (b) Welche Nullstellenverteilung hat f?

   (c) Eine der folgenden Formeln ist richtig. Begründen Sie welche.

   i) $f(z) = \sin(z)\cos(z)$

   ii) $f(z) = \sin(z)\sinh(z)$

   iii) $f(z) = (\sin(z))^2$

   iv) $f(z) = (\sinh(z))^2$

10. Bestimmen Sie Polynome $p_m(z)$ derart, dass
$$\sum_{m\in\mathbb{N}^+} \left(\frac{1}{z-\sqrt{m}} - p_m(z)\right)$$
kompakt konvergiert. Zeigen Sie dies für Ihre Wahl der Polynome.