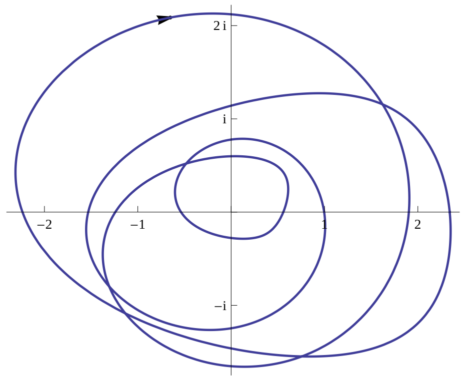
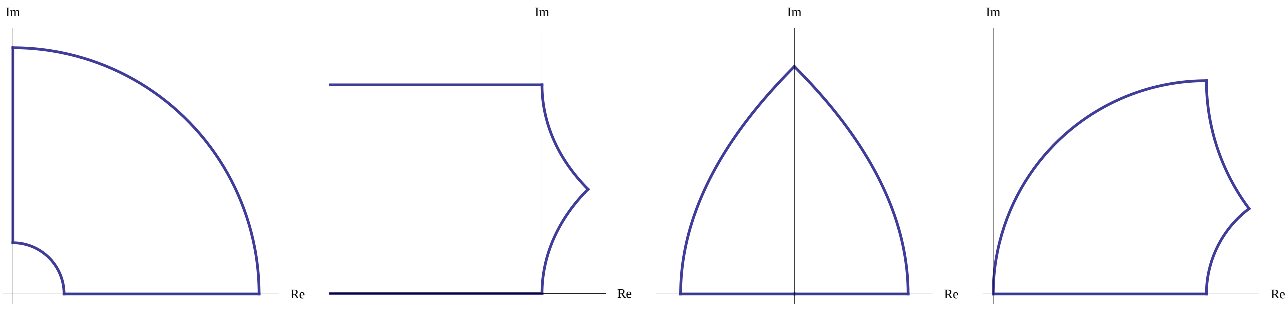
Nachklausur Funktionentheorie

05. Oktober 2012

1. Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ ist geschlossen und glatt und eine Skizze der Bildmenge mit Umlaufrichtung finden Sie rechts. Die Bildmenge wird einmal durchlaufen. Berechnen Sie
$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz.$$

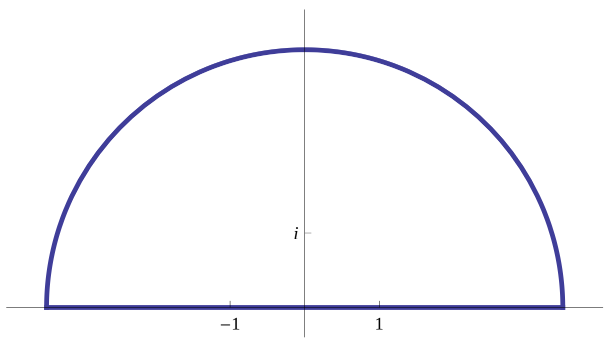


2. Wir betrachten die Bilder vom Rand des Quadrates mit Ecken $\{0, 1, 1+i, i\}$ unter den Abbildungen:
$$f_1(z) = z^2, \qquad f_2(z) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\pi z\right), \qquad f_3(z) = \operatorname{Log}(z), \qquad f_2(z) = \frac{z}{1+z}.$$
Welches Bild gehört zu welcher Abbildung?



Die Koordinatenachsen schneiden sich in $(0, 0)$.

3. Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+4} dx.$$
Als Hinweis folgt diese Kurve:



4. Für welche ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt $|f(z)| \leq |z| + 1$?

5. (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(z-1)^n}{2^n + 6^n} \quad ?$$

   PS. Hier ist wirklich die Summe über $\mathbb{Z}$ gemeint.

   (b) Berechnen Sie $\oint_{|z|=4} f(z)dz$.

6. Welche singulären Stellen hat $z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$?

   Ist diese Funktion meromorph?

7. Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort:

   (a) Wenn $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch sind, dann ist $z \mapsto f(z)\, g(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch.

   (b) Wenn $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch sind, dann ist $(x, y) \mapsto f(x, y)\, g(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch.

   (c) Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch ist, dann ist $(x, y) \mapsto f(x + iy)\, \overline{f(x + iy)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch.

   (d) Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch ist, dann ist $(x, y) \mapsto f(x + iy) + \overline{f(x + iy)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch.

8. Definieren Sie eine biholomorphe Abbildung $f : \{z \in \mathbb{C}; |z| < 2\} \to \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$.

9. Bestimmen Sie Polynome $p_m(z)$ derart, dass

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\frac{m}{z-m} - p_m(z) \right)$$

   kompakt konvergiert.

   Zeigen Sie die kompakte Konvergenz dieser Reihe für Ihre Wahl der Polynome.

10. Wir betrachten $f_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ existiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

   (b) Welche Nullstellenverteilung hat f?

   (c) Berechnen Sie $\frac{f(128)}{\sin(128)}$.