Prof. Guido Sweers **SS2102**

Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 1

1. **(0 Punkte)** Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\bar{z}$ die komplex Konjugierte zu z. Drücken Sie $\mathbf{Re}z$, $\mathbf{Im}z$ und $\|z\|$ nur durch z und $\bar{z}$ aus.

2. **(5 Punkte)**
   (a) Wie lassen sich Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ geometrisch veranschaulichen?
   (b) Lösen Sie die Gleichung
   $$z^2 + 4iz - 4 - i = 0$$
   sowohl rechnerisch als auch geometrisch.

3. **(5 Punkte)** Sei $f(z) = x^3y^2 + ix^2y^3$ für $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$. Bestimmen Sie alle z_0, an denen f differenzierbar ist.

4. **(0 Punkte)** Für welche $z \in \mathbb{C}$ sind folgende Funktionen $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, 5$ komplex differenzierbar? Geben Sie dort die Ableitung an!
   $$f_1(z) = z^{125} \qquad f_2(z) = |z|^{125} - |z|^{33}$$
   $$f_3(z) = \mathrm{Re}(z)^3 + i\mathrm{Im}(z) \qquad f_4(z) = 2\mathrm{Arg}(z) - i\ln(z\bar{z})$$
   $$f_5(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

5. **(0 Punkte)** Zeigen Sie: Gilt für eine komplex differenzierbare Funktion f, dass $f(z) \in \mathbb{R}$ liegt für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

6. **(10 Punkte)** Eine differenzierbare Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist invertierbar, wenn $f' \neq 0$. In $\mathbb{C}$ gilt so etwas nicht. Als Beispiel betrachten wir die Funktion exp.
   (a) Zeigen Sie, dass $\exp'(z) \neq 0$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $2\pi i$-periodisch ist.
   (c) Wählen Sie eine geschickte Teilmenge A von $\mathbb{C}$ derart, dass $\exp_{|A}$ invertierbar ist. Berechnen Sie die zugehörige Inverse.

7. **(0 Punkte)** Skizzieren Sie jeweils in der Gauß-Ebene die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, so dass gilt:
   (a) $\mathrm{Arg}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}\pi$.
   (b) $|z+2| = 2\,|z-1|$.

8. **(0 Punkte)** Zeigen Sie, dass das Produkt zweier komplex differenzierbarer Funktionen wieder komplex differenzierbar ist.