Prof. Guido Sweers **SS2102**

Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 10

1. **(5 Punkte)** Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $f : B_1(0) \to B_1(0)$ mit $f(0) = \frac{1}{2}$ an. Ist diese die einzig mögliche?

2. **(0 Punkte)**

   (a) Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ biholomorph. Zeigen Sie, dass sich f stetig auf dem Rand $\partial B_1(0)$ fortsetzen lässt und dass $f(\partial B_1(0)) \subset \partial B_1(0)$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass eine biholomorphe Abbildung $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eindeutig festgelegt wird
   - durch Angabe der Bilder dreier Randpunkte oder
   - durch Angabe von $f(\tilde{z})$ und $Arg(f'(\tilde{z}))$ für ein $\tilde{z} \in B_1(0)$ oder
   - durch Angabe von $f(\tilde{z})$ und $f(\hat{z})$ für $\tilde{z} \in B_1(0)$ und $\hat{z} \in \partial B_1(0)$.

3. **(0 Punkte)** In der Literatur findet man auch folgende Formulierung des Schwarzschen Lemmas:

   Es sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für $z \in B_1(0)$ und $|f'(0)| \leq 1$. Gilt ausserdem $|f(z_0)| = |z_0|$ in einem Punkt $z_0 \neq 0$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist $f(z) = e^{i\lambda}z$ mit passendem $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Zeigen Sie, dass diese Formulierung äquivalent zu der aus der Vorlesung ist (Lemma 10.6 in den Notizen zur Vorlesung).

4. **(5 Punkte)** Gibt es eine biholomorphe Abbildung $f : B_1(0) \to B_1(0)$ mit $f(0) = \frac{1}{2}$ und $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$?

5. **(0 Punkte)** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine konforme Abbildung. Weiterhin sei die für $x + iy \in U$ definierte Abbildung
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Ref(x+iy) \\ Imf(x+iy) \end{pmatrix}$$
   reell differenzierbar. Zeigen Sie, dass f holomorph ist.

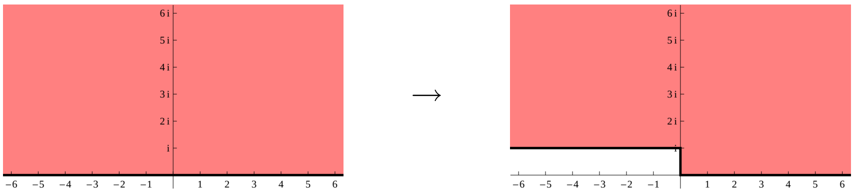
6. **(10 Punkte)**

   (a) Zeigen Sie, dass durch
$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$
   eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{R} + i\mathbb{R}^+ \to B_1(0)$ definiert wird.

   (b) Bestimmen Sie alle biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ nach $B_1(0)$.

7. **(0 Punkte)**

(a) Geben Sie eine Abbildung h an, die die obere Halbebene $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ biholomorph auf $(\mathbb{R}+i\mathbb{R}^+) \setminus ((-\infty, 0] + i(0,1])$ abbildet.



(b) Verwenden Sie Ihr Ergebnis, um eine biholomorphe Funktion von $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ nach $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, 0] + i[-1,1])$ zu finden.