

Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 11

1. **(10 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Funktion

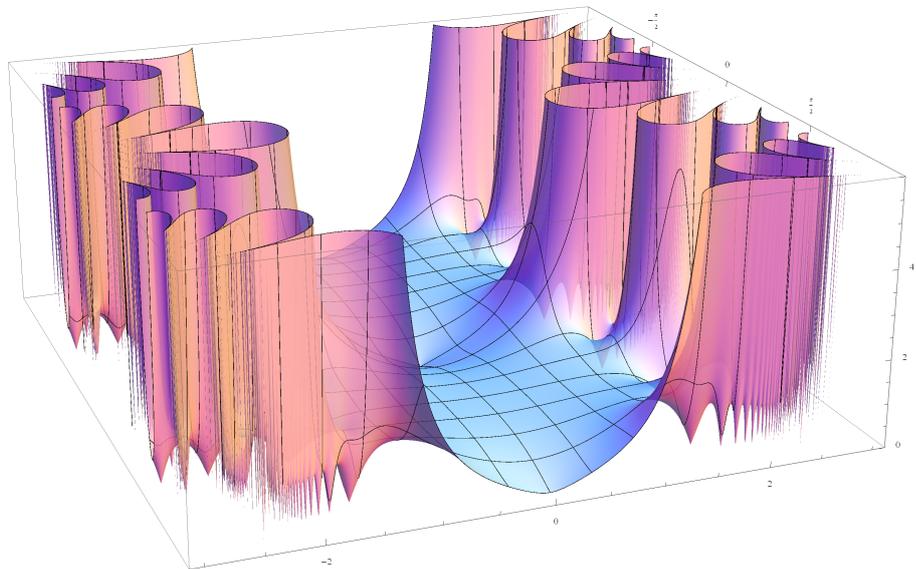
$$z \mapsto \sin(\sin(\sin(z)))$$

holomorph auf \mathbb{C} ist.

Benutzen Sie den Identitätssatz, um zu zeigen, dass

$$z \mapsto \frac{1}{\sin(\sin(\sin(z)))}$$

meromorph auf \mathbb{C} ist. Zur Verwirrung sehen Sie nachfolgend einen Plot des Betrages des Nenners.



Ein Plot von $z \mapsto |\sin(\sin(\sin(z)))|$.

2. **(5 Punkte)** Ist die Funktion

$$z \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sin(z)}\right)$$

meromorph auf \mathbb{C} ?

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion in einer Umgebung von 0.

3. **(5 Punkte)** Verwenden Sie den Satz von Rouché, um einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra zu erbringen.

Hinweis: Zeigen Sie, dass ein Polynom vom Grade n genau n Nullstellen (gewichtet mit der jeweiligen Vielfachheit) besitzt, indem Sie $z \mapsto z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ mit $z \mapsto z^n$ auf $B_R(0)$ mit genügend großem R vergleichen.

4. (0 Punkte) Für $r \in (0, 1)$ sei der Kreisring $A_r = B_1(0) \setminus \overline{B_r(0)}$ definiert. Sei h eine biholomorphe Abbildung von A_r nach A_R mit $0 < r \leq R < 1$, die stetig und bijektiv ist von $\overline{A_r}$ nach $\overline{A_R}$. Zeigen Sie, dass $r = R$ gilt, und vollziehen Sie dazu die folgenden Schritte:

(a) Zeigen Sie, dass $h(\partial A_r) = \partial A_R$.

(b) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \text{Entweder ist } h(\partial B_1(0)) = \partial B_1(0) \text{ und } h(\partial B_r(0)) = \partial B_R(0), \\ \text{oder es ist } h(\partial B_1(0)) = \partial B_R(0) \text{ und } h(\partial B_r(0)) = \partial B_1(0). \end{aligned}$$

(c) Im zweiten Fall erhält man für $f \circ h$ mit $f(z) = \frac{R}{z}$ den ersten Fall.

(d) Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass der erste Fall zutrifft und betrachten die Funktion

$$(x, y) \mapsto \ln r \ln |h(x + iy)| - \ln R \ln |x + iy|.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion harmonisch ist.

(e) Zeigen Sie, dass diese Funktion 0 ist für $x + iy \in \partial A_r$.

(f) Aus dem Maximumprinzip folgt dann

(g) Wenn

$$\ln r \ln |h(x + iy)| - \ln R \ln |x + iy| = 0,$$

kann man diese Funktion fortsetzen durch 0 auf \mathbb{C} . Weil man die holomorphen Funktionen kennt, die $\ln |h(x + iy)|$ und $\ln |x + iy|$ als Realteil haben, nämlich $\text{Log}_1(h(z)) + ic_1$ und $\text{Log}_2(z) + ic_2$ mit $c_i \in \mathbb{R}$ und geschickt gewähltem Schnitt in den Logarithmen, folgt

$$\ln r \text{Log}_1(h(z)) - \ln R \text{Log}_2(z) = i\hat{c}.$$

Wählen Sie den Schnitt $z \mapsto \text{Log}_1(h(z))$ und $z \mapsto \text{Log}_2(z)$ an der gleichen Stelle, und weil die Kombination stetig sein muss, folgt

5. (0 Punkte) Beweisen Sie für $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{i) } \left(\frac{\pi}{\cos(\pi z)} \right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2} - n\right)^2} \quad \text{ii) } \pi \tan(\pi z) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z - \frac{1}{2} - n} + \frac{1}{\frac{1}{2} + n} \right)$$

6. (0 Punkte) Vereinfachen Sie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) - z} - \frac{n}{\pi(n^2 + 1)} \right)$$

zu einer Formel mit bekannten Funktionen ohne Summenzeichen.