Prof. Guido Sweers **SS2102**

Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 12

1. **(20 Punkte)** Wir betrachten die meromorphe Funktion $m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$m(z) = \frac{1}{\sin(z)} - \frac{2}{\sin(2z)}.$$

Nach dem Satz über die Partialbruchzerlegung läßt sie sich schreiben als

$$m(z) = h(z) + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(f_\ell(z) - g_\ell(z) \right),$$

wobei h für eine holomorphe Funktion, f_ℓ für den Hauptteil bei der Polstelle $z = z_\ell$ und g_ℓ jeweils für ein geschickt gewähltes Taylorpolynom steht.

(a) Welche Polstellen hat m?

(b) Bestimmen Sie die Hauptteile f_ℓ.

(c) Bestimmen Sie die Taylorpolynome g_ℓ so, dass $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (f_\ell - g_\ell)$ kompakt konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass $h(z) = m(z) - \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (f_\ell(z) - g_\ell(z))$ (bei geschickt gewählten g_ℓ) periodisch ist in der reellen Richtung.

(e) Zeigen Sie, dass h konstant ist.

(f) Wie sieht h aus?

(g) Geben Sie eine Partialbruchzerlegung von m an.

2. **(0 Punkte)** Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Es existiere

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} Log(1 + \alpha_k)$$

in $\mathbb{C}$. Existiert dann auch

$$\lim_{n \to \infty} Log \left(\prod_{k=0}^{n} (1 + \alpha_k) \right)?$$

3. **(0 Punkte)** Zeigen Sie, dass gilt:

$$\cos(\pi z) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{k + \frac{1}{2}} \right) \exp\left(\frac{z}{k + \frac{1}{2}} \right)$$

4. **(0 Punkte)** Gibt es eine ganze Funktion, die $\{k, k\}_{k=1}^{\infty}$ als Nullstellenverteilung hat?

5. **(0 Punkte)** Beweisen Sie die *Legendresche Verdoppelungsformel*:

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2})$$