Prof. Guido Sweers **SS2102**

Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 2

1. **(0 Punkte)** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine überall reell differenzierbare Funktion.

   (a) Zeigen Sie: Wenn f nicht injektiv ist, dann gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $f'(\xi) = 0$.

   Daraus kann man schließen, dass f eine Inverse besitzt, falls $f'(x) \neq 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Im Komplexen ist dieser Schluss nicht möglich.

   (a) Geben Sie ein Beispiel einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion g an, für die $g'(z) \neq 0$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ und die trotzdem nicht invertierbar ist.

   (b) Wieso ist dies kein Widerspruch zu Proposition 2.3?

3. **(10 Punkte)** Mit den Mitteln aus Analysis I lässt sich $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ nur berechnen, wenn man bereits weiß, dass arctan eine Stammfunktion zum Integranden ist. Im Folgenden wird eine konstruktive Methode zur Integration entwickelt. Sei dazu $x \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Berechnen Sie $\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   (b) Berechnen Sie $\frac{d}{dx}\mathrm{Log}\,(x-i)$.

   (c) Führen Sie eine Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x^2+1}$ durch und bestimmen Sie Stammfunktionen der Summanden.

   (d) Zeigen Sie, dass sich die von Ihnen so erhaltene Stammfunktion von $\frac{1}{x^2+1}$ nur durch eine Konstante von $\arctan x$ unterscheidet.

4. **(0 Punkte)** Es gilt $e^{2\pi i} = 1$, also auch $e^{2\pi n i} = 1$ für $n \in \mathbb{Z}$, und folglich $e^{1+2n\pi i} = 1 \cdot e = e$ und $e^{1-4n^2\pi^2+4n\pi i} = \left(e^{1+2n\pi i}\right)^{1+2n\pi i} = e^{1+2n\pi i} = e$. Wegen $e^{1+4n\pi i} = e$ ergibt sich daraus $e^{-4n^2\pi^2} = 1$, also $1 = e^{4n^2\pi^2}$ und somit $e = 1^{\frac{1}{4n^2\pi^2}} = 1$. Was ist hier los?

5. **(10 Punkte)** Gegeben sei die gebrochen-lineare Transformation $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit

   $$f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

   Wie sehen die Bilder der folgenden Mengen unter f aus? Zeichnen Sie die Bildmengen jeweils in ein Koordinatensystem und begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}z = 1\}$

   (b) $\{z \in \mathbb{C}; |z-2| = 1\}$

   (c) $\{z \in \mathbb{C}; |z-i| = 1\}$

   (d) $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z\}$

6. **(0 Punkte)** Bestimmen Sie die gebrochen-lineare Transformation, für die gleichzeitig gilt

   $$2 \mapsto \infty, \quad i \mapsto 0 \text{ und } \infty \mapsto 1.$$