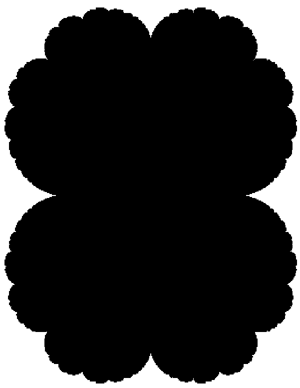
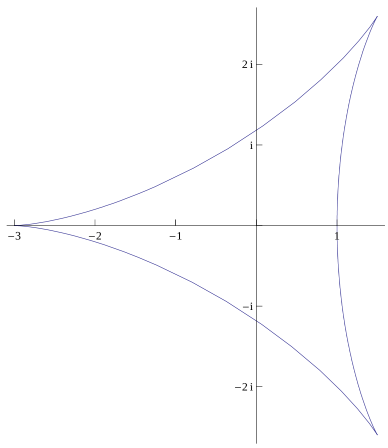
Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 3

1. **(6 Punkte)** Sei $p(z) = z^2 + \frac{1}{4}$. Für den Startwert $z_0 \in \mathbb{C}$ sei rekursiv die Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ definiert durch $z_{n+1} = p(z_n)$. Zeigen Sie:
   (a) Gilt $|z_0| \geq \frac{7}{4}$, so divergiert die Folge.
   (b) Gilt $|z_0| \leq \frac{1}{2}$, so ist die Folge beschränkt.



zu Aufgabe 1



zu Aufgabe 2

2. **(0 Punkte)** Gegeben sei die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ mit

$$x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t),$$
$$y(t) = 2\sin(t) + \sin(2t).$$

   Ist γ differenzierbar / glatt / einfach / geschlossen / eine Jordan-Kurve?

3. **(6 Punkte)** Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Berechnen Sie für $\gamma_\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_\alpha(t) = t + it^\alpha$ die Integrale

$$\int_{\gamma_\alpha} \mathrm{Re}(z)\, dz \qquad \text{und} \qquad \int_{\gamma_\alpha} z^2\, dz.$$

4. **(0 Punkte)** Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma z^n dz.$$

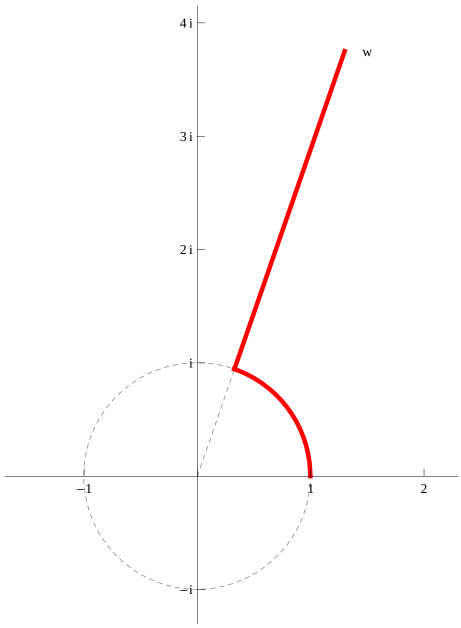
5. **(8 Punkte)** Für $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sei γ_w eine stückweise glatte Kurve, die 1 mit w verbindet durch den kürzesten Weg über den Kreisbogen mit Radius 1 um O und die Gerade von $w/|w|$ nach w (s. Abb. 2).

   Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_w} \frac{1}{z} dz = \mathrm{Log}(w).$$

   Zeigen Sie auch, dass für $\zeta_w : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\zeta_w(t) = (1-t) + tw$ gilt

$$\int_{\zeta_w} \frac{1}{z} dz = \mathrm{Log}(w).$$



zu Aufgabe 5