Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 4

1. **(0 Punkte)** Ergänzen Sie:
   - $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$ ist eine Stammfunktion zu $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf ....
   - $\mathrm{Log}^*(z) = \ln|z| + i\left(\mathrm{Arg}(iz) - \frac{1}{2}\pi\right)$ ist eine Stammfunktion zu $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf ....
   - Für $z \in$...... gilt $\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}^*(z)$.
   - Für $z \in$...... gilt $\mathrm{Log}(z) \neq \mathrm{Log}^*(z)$.

2. **(6 Punkte)** Finden Sie eine Stammfunktion mit größtmöglichem Definitionsgebiet zu $z \mapsto \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}$.

3. **(0 Punkte)** Sei $z \mapsto f(z)$ holomorph auf $U \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ holomorph ist auf $\overline{U} := \{z \in \mathbb{C}; \overline{z} \in U\}$.

4. **(8 Punkte)** Für $r > 0$ sei $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_r(t) = re^{it}$. Berechnen Sie
$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z(z-1)}\, dz$$
für alle $r > 0$, an denen es definiert ist.

5. **(6 Punkte)** Berechnen Sie
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{4} + \sin t}\, dt.$$
Hinweis: Versuchen Sie, das Integral auf die Form $\int_\gamma f(z)\, dz$ zu bringen, wobei γ der Weg ist, der einmal entlang von $\partial B_1(0)$ verläuft.

6. **(0 Punkte)** Für $m \in \mathbb{N}$ sei $(a_k)_{k=-m}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ den Konvergenzradius 4 hat. Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie
$$\int_\gamma \sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k\, dz.$$

7. **(0 Punkte)** Was ändert sich am Ergebnis von Aufgabe 6, wenn man längs $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = 2e^{it} - e^{-2it}$ integriert? Eine Skizze dieser Kurve findet man in Aufgabe 2, Blatt 4.