Prof. Guido Sweers **SS2102**

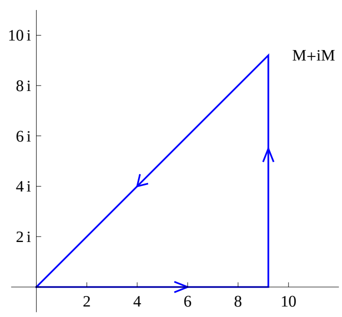
Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 5

1. **(0 Punkte)** Für $t \in [0, 2\pi]$ sei $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^5}\, dz.$$

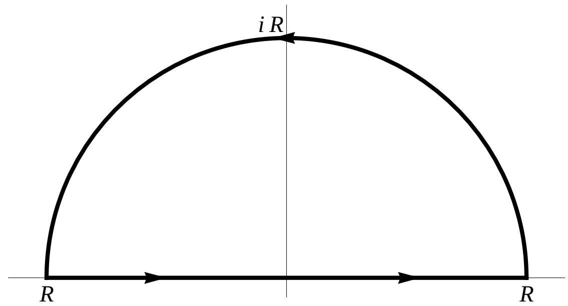
2. **(5 Punkte)** Für $t \in [0, 2\pi]$ sei $\mu(t) = 4e^{it}$. Berechnen Sie
$$\int_\mu \tan z\, dz.$$

3. **(5 Punkte)** Sei P ein Polynom und γ eine stückweise stetig differenzierbare, linksherum laufende Jordan-Kurve, die durch keine Nullstelle von P verläuft. Zeigen Sie, dass
$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$$
die (mit der jeweiligen Vielfachheit gewichtete) Zahl der Nullstellen innerhalb von γ angibt.

4. **(0 Punkte)** Berechnen Sie
$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx.$$
Betrachten Sie dazu $\int_\gamma e^{iz^2}\, dz$ längs des unten skizzierten Weges γ, lassen Sie $M \to \infty$ gehen und verwenden Sie, dass $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gilt.



zu Aufgabe 4



zu Aufgabe 5

5. **(10 Punkte)** Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4} dx.$$
Hinweis: Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{1}{1+z^4} dz$ längs des oben skizzierten Weges γ und lassen Sie $R \to \infty$ gehen.

6. **(0 Punkte)** Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \text{für } x \in \ B_1(0) := \left\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\right\} \\ u(x) = g(x) & \text{für } x \in \partial B_1(0) \end{cases}$$

für eine gegebene stetige Funktion $g : \partial B_1(0) \to \mathbb{R}$ lässt sich darstellen als

$$u(x) = \int_{\partial B_1(0)} K_{B_1(0)}(x,z)\, g(z)\, d\sigma(z),$$

wobei $\int_{\partial B_1(0)} \ldots d\sigma(z)$ für das Standard–Kurvenintegral in $\mathbb{R}^2$ steht und der *Poisson–Kern* $K_{B_1(0)}$ gegeben ist durch

$$K_{B_1(0)}(x,z) := \frac{1}{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|x-z|^2}.$$

Berechnen Sie die Lösung u für $g(x) = g(x_1, x_2) = x_1^2$.