Prof. Guido Sweers **SS2102**

Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 6

1. **(6 Punkte)** Berechnen Sie
$$\oint_{|z|=5} \frac{1}{\sin\left(1+\frac{1}{z}\right)}\, dz.$$

2. **(6 Punkte)** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ die in Bild 1 skizzierte offene Menge und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien $z_1 \in U$ und $r_1 > 0$ so gewählt, dass $B_{r_1}(z_1) \subset U$ gilt. Nach Satz 6.2 lässt sich f um z_1 in eine Potenzreihe p_1 entwickeln. Diese habe einen Konvergenzradius $R_1 > r_1$. Sei ausserdem $U \cap B_{R_1}(z_1)$ zusammenhängend, wie es in Bild 2 dargestellt ist.

   (a) Zeigen Sie, dass $f(z) = p_1(z)$ gilt für alle $z \in U \cap B_{R_1}(z_1)$.

   Also kann man f erweitern zu einer holomorphen Funktion $f_1 : U \cup B_{R_1}(z_1) \to \mathbb{C}$ durch
$$f_1(z) := \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in U \\ p_1(z), & \text{falls } z \in B_{R_1}(z_1) \setminus U. \end{cases}$$

   Es gebe nun analog $z_2 \in U$ und $r_2 > 0$ und eine Potenzreihenentwicklung p_2 um z_2 mit Konvergenzradius $R_2 > r_2$, so dass sich f wie im Bild 3 angedeutet zu einer Funktion $f_2 : U \cup B_{R_2}(z_2) \to \mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Ausserdem sei $B_{R_1}(z_1) \cap B_{R_2}(z_2) \neq \emptyset$.

   (a) Stimmt es, dass $f_1(z) = f_2(z)$ gilt für $z \in B_{R_1}(z_1) \cap B_{R_2}(z_2)$?

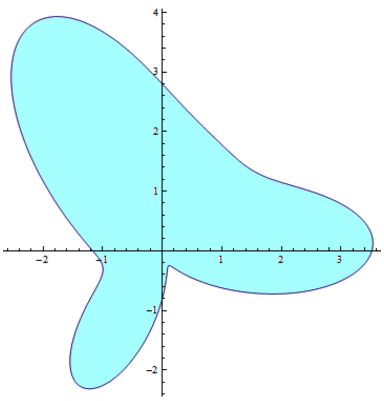

Bild 1

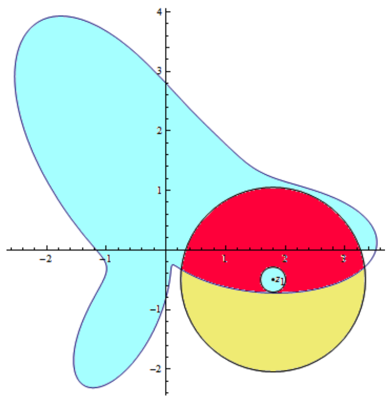

Bild 2

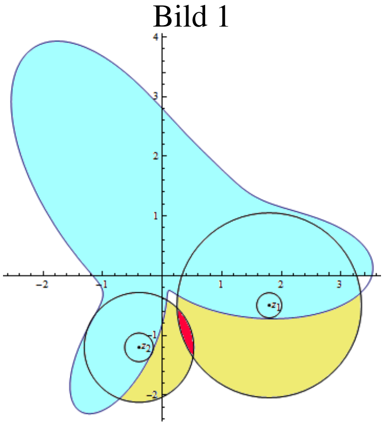

Bild 3

4. **(0 Punkte)** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

   (a) Zeigen Sie: Gibt es ein $z_0 \in U$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist $f \equiv 0$ auf U.

   (b) Gilt die Aussage aus Teil 1. auch, wenn U nicht zusammenhängend ist?

   (c) Gilt die Aussage aus Teil 1. auch, wenn $U \subset \mathbb{R}$ und f nur reell differenzierbar ist?

5. **(8 Punkte)**

   (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4^n} z^n := \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{1+4^n} z^n$$

   wohldefiniert? Zeigen Sie, dass f holomorph ist auf dem Inneren des Definitionsgebietes.

   (b) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz.$$

   (c) Berechnen Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (z-2)^n .$$

   (d) Geben Sie eine Stammfunktion auf größtmöglichem Gebiet an.

6. **(0 Punkte)** Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, und es gebe $M, \alpha \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f(z)| \leq M |z|^{-\alpha} .$$

   Zeigen Sie: Es gibt $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ mit $n = [\alpha] = \max\{n \in \mathbb{N}; n \leq \alpha\}$ und eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion g, so dass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(z) = c_n z^{-n} + c_{n-1} z^{1-n} + \cdots + c_1 z^{-1} + g(z).$$

   Hinweis: Betrachten Sie $h(z) = z^{n+1} f(z)$.

7. **(0 Punkte)** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass für $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ gilt

$$\begin{aligned} Re\,(f(z_0)) &\leq \max\{Re f(z); z \in \partial B_r(z_0)\}, \\ Re\,(f(z_0)) &\geq \min\{Re f(z); z \in \partial B_r(z_0)\}. \end{aligned}$$