Prof. Guido Sweers **SS2102**

Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 7

1. **(0 Punkte)** Sei f holomorph auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $u(x,y) := Re(f(x-iy))$ harmonisch ist auf $U_{\mathbb{R}}$.

2. **(0 Punkte)** Im Skript auf Seite 71 sind für $n = 1, \ldots, 5$ Paare von Polynomen auf $\mathbb{R}^2$ aufgeführt, die

   - jeweils nur aus Termen der Ordnung n bestehen,
   - harmonisch und
   - linear unabhängig sind.

   Finden Sie ein solches Paar von Polynomen für $n = 6$.

3. **(6 Punkte)**

   (a) Welche ganzen Funktionen f erfüllen $Re(f(z)) \geq |z|$?

   (b) Welche ganzen Funktionen f erfüllen $Re(f(z)) \geq Im(f(z))$?

4. **(5 Punkte)** Sei f eine ganze Funktion, die die folgende Bedingung erfüllt: Es gibt $M \in \mathbb{R}^+$ derart, dass $|f(z)| \leq M$ gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $Imz \geq 0$. Ist f konstant?

5. **(0 Punkte)** Wir setzen $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) > 0\}$ und untersuchen im folgenden die Abbildung $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, die gegeben ist durch
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

   (a) Die Abbildung lässt sich – bis auf im Punkte 0 – stetig auf $\partial\mathbb{H}$ fortsetzen. Wie sieht das Bild von $\partial\mathbb{H}$ unter f aus?

   (b) Wir betrachten die Halbkreise $K_r := B_r(0) \cap \mathbb{H}$. Wie sieht $f(K_r)$ aus? Unterscheiden Sie insbesondere die Fälle $0 < r < 1$ und $r > 1$ und beschreiben Sie, was für $r \to \infty$ und $r \to 0$ passiert.

   (c) Wie sieht $f(\mathbb{H})$ aus?

   (d) Versuchen Sie, gerne mit einem Computer-Algebra-System wie Maple oder Mathematica, die Funktion zu skizzieren.

   (e) Versuchen Sie, in Worten zu beschreiben, wie die Abbildung wirkt.

6. **(9 Punkte)** Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ und erfülle die folgende Abschätzung: Es gibt $k \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{R}$ mit
$$|f(z)| \leq M \frac{1 + |z|^k}{|1 + z^2|}.$$

   Zeigen Sie:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ hat Konvergenzradius ≥ 1.

   (b) $\left(z^2 + 1\right) f(z)$ ist ein Polynom.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right) z^n$ hat Konvergenzradius ∞.

7. **(0 Punkte)** Sei $O \subset \mathbb{R}^2$ offen. Für eine reell analytische Funktion $u : O \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$v(z,\bar{z}) := u(\tfrac{z+\bar{z}}{2}, \tfrac{z-\bar{z}}{2i})$$

(a) Zeigen Sie formal, dass gilt:

$$\Delta u(x,y) = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v(z,\bar{z})$$

(b) Wir betrachten nun z und $\bar{z}$ als unabhängige (reelle) Variablen. Zeigen Sie formal, dass sich die Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v(z,\bar{z}) = 0$$

schreiben lässt als

$$v(z,\bar{z}) = f(z) + g(\bar{z}).$$

(c) Wie sieht dann die formale Lösung aus von

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v(z,\bar{z}) = 0?$$