Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 8

1. Finden Sie harmonische Funktionen $u_i : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$, die folgende Randbedingungen erfüllen:

   (a) **(3 Punkte)** $u_1(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos\varphi$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$;
   (b) **(0 Punkte)** $u_2(\cos\varphi, \sin\varphi) = \sin\varphi$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$;
   (c) **(0 Punkte)** $u_3(\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\varphi)^3 - 3\cos\varphi\,(\sin\varphi)^2$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$;
   (d) **(3 Punkte)** $u_4(\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\varphi)^3$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

2. **(9 Punkte)** Wir betrachten die Funktion $u(x_1, x_2) = \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(1-x_1)^2 + x_2^2}$.

   (a) Zeigen Sie, dass u harmonisch ist in $B_1(0)$.
   (b) Gilt $u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\|y\|=1} u(y)d\sigma_y$?
   (c) Gilt $u(0,0) = \frac{1}{\pi}\int_{\|y\|<1} u(y)dy$?

3. **(5 Punkte)** Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante ganze Funktion. Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist, also $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$ gilt. Gilt sogar $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$?
   Hinweis: Für $\omega \notin f(\mathbb{C})$ kann man $g(z) := \frac{1}{f(z) - \omega}$ definieren.

4. **(0 Punkte)** Auf dem Rand des Einheitskreises seien n verschiedene Punkte $a_1, \ldots, a_n$ gegeben. Zeigen Sie, dass es einen Punkt a_0 auf dem Einheitskreis gibt mit

   $$\prod_{i=1}^{n} |a_0 - a_i| \geq 1.$$

   Hinweis: Betrachten Sie $p(z) := \prod_{i=1}^{n}(z - a_i)$.

5. **(0 Punkte)** Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ stetig und sei f holomorph auf $B_1(0)$. Ausserdem sei $f(B_1(0))$ offen und $f\left(\overline{B_1(0)}\right)$ konvex. Zeigen Sie, dass $\partial f(B_1(0)) \subset f(\partial B_1(0))$ gilt.
   Hinweis: Wenn eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konvex ist, dann gibt es durch jedes $y \in \partial\Omega$ eine Gerade derart, dass Ω auf einer Seite dieser Gerade liegt:

   $$\forall y \in \partial\Omega\ \exists p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ mit } \forall x \in \Omega : \ p \cdot (x - y) \leq 0.$$

   Man benutze das Maximum-Prinzip für $Re\left((p_1 - ip_2)\left(f(z) - f(y_1 + iy_2)\right)\right)$.

6. **(0 Punkte)** Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt subharmonisch auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, wenn $-\Delta u(x) \leq 0$ für $x \in \Omega$.

   (a) Zeigen Sie: Ist u harmonisch und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und konvex, dann ist $\phi(u)$ subharmonisch.
   (b) Zeigen Sie: Ist u harmonisch, dann ist $|\nabla u|^2$ subharmonisch.