Prof. Guido Sweers **SS2102**

Funktionentheorie
Uebungsblatt Nr. 9

1. **(15 Punkte)** Wir betrachten die Abbildung h, definiert durch
$$z \mapsto ie^{\frac{1}{2}(Log(iz-1)+Log(iz+1))}.$$
   (a) Zeigen Sie: Auf $\mathbb{C} \setminus i[-1,1]$ ist h wohldefiniert und holomorph.
   (b) Zeigen Sie, dass h eine Bijektion von $\mathbb{C} \setminus i[-1,1]$ nach $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ definiert. Wie lautet die Umkehrabbildung?
   (c) Zeigen Sie, dass auch die Umkehrabbildung holomorph ist.

2. Die Abbildung h aus Aufgabe 1 lässt sich als komplexes Potential einer Strömung um eine Wand senkrecht zur Strömungsrichtung auffassen. Diese entspricht dem Schlitz $i[-1,1]$, auf dem h nicht holomorph ist.
   (a) **(5 Punkte)** Wie lautet das zugehörige reelle Potential F, das die Strömung beschreibt?
   (b) **(0 Punkte)** Berechnen Sie das Vektorfeld $\vec{v}$, das die Geschwindigkeit der Strömung angibt.
   (c) **(0 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Wand tatsächlich umflossen wird, dass also die Neumann-Randbedingung auf beiden Seiten des Schlitzes erfüllt wird.
   (d) **(0 Punkte)** Die Funktion $h_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto -z$ ist das Potential einer konstanten Strömung ohne Hindernis. Das zugehörige Vektorfeld sei $\vec{v}_0$. Zeigen Sie, dass die durch h beschriebene Strömung in einiger Entfernung von der Wand einer solchen ungestörten Strömung entspricht, indem Sie nachweisen, dass $\lim_{|z|\to\infty} |\vec{v}(z) - \vec{v}_0(z)| = 0$ gilt.

3. **(0 Punkte)** Skizzieren Sie die Niveau- und Strömungslinien der in Aufgabe 2 untersuchten Strömung. Verwenden Sie dazu gerne ein Computeralgebrasystem wie Maple oder Mathematica.

4. **(0 Punkte)** Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C} \setminus [-2,2]$ mit $f(z) = z + \frac{1}{z}$ ist bijektiv. Die inverse Funktion hat als Vorschrift
$$f^{inv}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z + i\, e^{\frac{1}{2}Log\left(1-\frac{1}{4}z^2\right)} & \text{für } Im(z) > 0, \\ \frac{1}{2}z + \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - 1} & \text{für } z \in (2,\infty), \\ \frac{1}{2}z - \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - 1} & \text{für } z \in (-\infty,-2), \\ \frac{1}{2}z - i\, e^{\frac{1}{2}Log\left(1-\frac{1}{4}z^2\right)} & \text{für } Im(z) < 0. \end{cases}$$
   Diese Inverse kann man auch durch folgende Vorschrift angeben:
$$f^{inv}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z + e^{\frac{1}{2}Log\left(\frac{1}{4}z^2-1\right)} & \text{für } Re(z) > 0 \text{ und } z \notin [0,2], \\ \frac{1}{2}z + i\sqrt{1 - \frac{1}{4}z^2} & \text{für } z \in i(0,\infty), \\ \frac{1}{2}z - i\sqrt{1 - \frac{1}{4}z^2} & \text{für } z \in i(-\infty,0), \\ \frac{1}{2}z - e^{\frac{1}{2}Log\left(\frac{1}{4}z^2-1\right)} & \text{für } Re(z) < 0 \text{ und } z \notin [-2,0]. \end{cases}$$
   Zeigen Sie, dass die beiden Definitionen übereinstimmen.

5. **(0 Punkte)** Die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus ((-\infty,-2] \cup [2,\infty)) \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \frac{1}{2}z + i\, e^{\frac{1}{2}Log\left(1-\frac{1}{4}z^2\right)}$ ist holomorph. Beschreiben Sie die Strömung zum Potential
$$F(x,y) = Re g(x+iy).$$