

Notizen zur Vorlesung

Funktionentheorie



G. Sweers

Sommersemester 2015

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Rechnen und Differenzieren in \mathbb{C} | 1 |
| 1.1 | Komplexe Zahlen | 1 |
| 1.2 | Topologie und Geometrie in \mathbb{C} | 2 |
| 1.3 | Bekannte Funktionentypen | 3 |
| 1.3.1 | Polynome. | 3 |
| 1.3.2 | Rationale Funktionen. | 4 |
| 1.3.3 | Potenzreihen. | 4 |
| 1.4 | Stetigkeit und Differenzierbarkeit | 5 |
| 1.4.1 | Die Definitionen | 5 |
| 1.4.2 | Vergleich komplexer und reeller Differenzierbarkeit | 5 |
| 2 | Elementares zu Funktionen in \mathbb{C} | 11 |
| 2.1 | Potenzreihen und Differenzieren | 11 |
| 2.2 | Inverse Funktion und Graphische Darstellung | 13 |
| 2.3 | Einige elementare Funktionen | 15 |
| 2.4 | Gebrochen-lineare Funktionen | 18 |
| 2.4.1 | Gebrochen-lineare Funktionen auf $\hat{\mathbb{C}}$ | 19 |
| 2.4.2 | Eigenschaften von gebrochen-linearen Funktionen | 21 |
| 3 | Folgen, Fraktale, Kurven und Integrale | 23 |
| 3.1 | Nullstellensuche mit Newton und anderen Folgen | 23 |
| 3.2 | Iterative Folgen | 24 |
| 3.3 | Kurven | 26 |
| 3.4 | Kurvenintegrale | 29 |
| 4 | Kurvenintegrale und Cauchy | 33 |
| 4.1 | Stammfunktion und geschlossene Kurven | 33 |
| 4.2 | Der Integralsatz von Cauchy | 34 |
| 4.3 | Residuum | 37 |
| 5 | Singuläre Stellen | 45 |
| 5.1 | Beispiele zur Funktion und Stammfunktion | 45 |
| 5.2 | Die Integralformel von Cauchy | 50 |
| 5.3 | Holomorphe Funktionen haben holomorphe Ableitungen | 51 |
| 5.4 | Holomorph mit Ausnahme einer Singularität | 52 |
| 5.5 | Pole und wesentliche Singularitäten | 55 |
| 6 | Analytische Funktionen | 59 |
| 6.1 | Holomorphe Funktionen und Potenzreihen | 59 |
| 6.2 | Nullstellen eines Polynoms | 64 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 6.3 | Das Maximum-Prinzip | 66 |
| 7 | Eigenschaften holomorpher Funktionen | 69 |
| 7.1 | Ganze Funktionen | 69 |
| 7.2 | Äquivalente Aussagen | 70 |
| 7.3 | Verbindung mit reellen Funktionen | 72 |
| 7.3.1 | Intermezzo | 76 |
| 8 | Harmonische Funktionen in 2 Dimensionen | 79 |
| 8.1 | Die stationäre Wärmeleitungsgleichung | 79 |
| 8.2 | Folgen der Holomorphie | 82 |
| 8.3 | Subharmonische Funktionen | 86 |
| 8.4 | Positive harmonische Funktionen | 87 |
| 9 | Potentialströmungen | 91 |
| 9.1 | Ein Modell zu Potentialströmungen | 91 |
| 9.2 | Potentialströme mit Randbedingungen | 94 |
| 9.3 | Beispiele von Potentialströmungen | 95 |
| 9.4 | Joukowski | 97 |
| 10 | Biholomorphe Abbildungen | 101 |
| 10.1 | Konform und biholomorph | 101 |
| 10.2 | Kreisscheibe zu Kreisscheibe | 104 |
| 10.3 | Riemannscher Abbildungssatz | 106 |
| 10.4 | Konstruktion biholomorpher Abbildungen | 107 |
| 10.4.1 | Von der Halbebene zum Sektor | 107 |
| 10.4.2 | Von der Halbebene zu einem Polygon mit drei Kanten | 108 |
| 10.5 | Biholomorph bei mehrfachem Zusammenhang | 112 |
| 11 | Funktionen und Polstellen | 113 |
| 11.1 | Meromorphe Funktionen | 113 |
| 11.2 | Nullstellen, Pole und ein Kurvenintegral | 115 |
| 11.3 | Partialbruchentwicklung | 118 |
| 11.4 | Beispiele einiger Partialbruchentwicklungen | 123 |
| 12 | Funktionen und Nullstellen | 127 |
| 12.1 | Ganze Funktionen mit bestimmten Nullstellen | 127 |
| 12.2 | Unendliche Produkte und Reihen | 128 |
| 12.3 | Der Satz von Weierstraß | 131 |
| 12.4 | Einige Nullstellenentwicklungen | 132 |
| 13 | Spezielle Funktionen | 135 |
| 13.1 | Die Gamma-Funktion | 135 |
| 13.2 | Die Riemannsche zeta-Funktion | 139 |
| 13.3 | Die Weierstraßsche p-Funktionen | 146 |
| 14 | Konvergenz und Folgen | 153 |
| 14.1 | Gleichmäßige Konvergenz | 153 |
| 14.2 | Beweis des Riemannsches Abbildungssatzes | 156 |
| 14.3 | Schwarz und Christoffel | 159 |

Funktionentheorie, Woche 1

$f(z)$

Rechnen und Differenzieren in \mathbb{C}

1.1 Komplexe Zahlen

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und i das imaginäre Symbol definiert man die komplexe Zahl $x+iy$. Zusätzlich definiert man für solche komplexe Zahlen die Addition und die Multiplikation wie folgt:

$$\begin{aligned}(x+iy) + (u+iv) &:= (x+u) + i(y+v), \\ (x+iy) \cdot (u+iv) &:= (xu-yv) + i(yu+xv).\end{aligned}$$

Die Menge solcher Zahlen wird \mathbb{C} genannt:

$$\mathbb{C} = \{z; z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Identifiziert man $x+i0$ mit x , so wird \mathbb{R} eine Teilmenge von \mathbb{C} . Legt man fest, dass $i^2 = -1$, dann ist die Addition und Multiplikation für komplexe Zahlen „genau so“ wie für reelle Zahlen.

Die Körpereigenschaften werden durch $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ erfüllt. Wir erinnern uns nochmals, dass für $x+iy \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2},$$

und man so die Inverse zu $x+iy \neq 0$ konstruiert.

Wie schon bekannt aus Analysis 1:

- Die Addition zweier komplexer Zahlen in der Gauß-Ebene ist die Addition der Vektoren.
- Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen läßt sich darstellen in der Gauß-Ebene durch Addition der Argumente und Multiplikation der Beträge.

Verwendet man Polarkoordinaten $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, schreibt man $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und ähnliches für eine zweite Zahl w , dann kann man zeigen, dass

$$\left(r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\right) \cdot \left(s(\cos \psi + i \sin \psi)\right) = rs \left(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)\right). \quad (1.1)$$

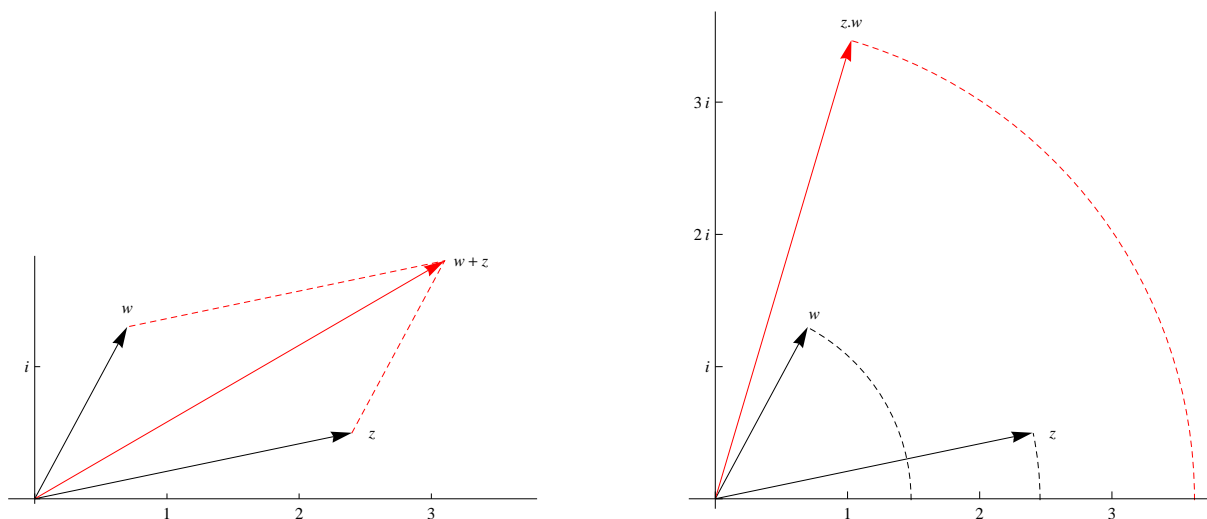


Abbildung 1.1: Addition und Multiplikation dargestellt in der Gauß-Ebene

Diese letzte Gleichung sieht man leicht mit der Formel von Euler

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

und mit den bekannten Formeln für Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi + \psi) &= \sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi, \\ \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi. \end{aligned}$$

Einige Absprachen für $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ sind:

| | |
|--------------------------|--|
| Der Realteil: | $\operatorname{Re}(x + iy) = x.$ |
| Der Imaginärteil: | $\operatorname{Im}(x + iy) = y.$ |
| Die komplex konjugierte: | $\overline{x + iy} = x - iy.$ |
| Der Betrag: | $ x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}.$ |
| Das Argument: | $\operatorname{Arg}(r(\cos \varphi + i \sin \varphi)) = \varphi \quad \text{wenn } \varphi \in (-\pi, \pi].$ |

Oft wird als Bereich für das Argument auch $[0, 2\pi)$ genommen. Mit (1.1) sieht man, dass für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$|zw| = |z||w| \quad \text{und} \quad \operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) + 2k\pi \quad \text{mit } k \in \{-1, 0, 1\}.$$

1.2 Topologie und Geometrie in \mathbb{C}

Man definiert die offene Kreisscheibe für $w \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$ durch:

$$B_r(w) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - w| < r\}.$$

Weil $|z - w| = \|(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) - (\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)\|$ sieht die Kreisscheibe so aus wie die in \mathbb{R}^2 .

Eine offene Menge in \mathbb{C} ist definiert durch:

$$A \subset \mathbb{C} \text{ ist offen, wenn es für jedes } w \in A \text{ ein } r \in \mathbb{R}^+ \text{ gibt mit } B_r(w) \subset A.$$

Das heißt, offene Mengen in \mathbb{C} „sehen aus“ wie offene Mengen in \mathbb{R}^2 . Die Topologie in \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} ist also ähnlich.

Geometrisch lässt sich mehr Interessantes zeigen. Einige Figuren kann man einfach mit komplexen Zahlen beschreiben.

- Der Kreis um $w \in \mathbb{C}$ mit Radius r :

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - w| = r\}.$$

- Die Linie mit gleicher Distanz zu w_1 und $w_2 \in \mathbb{C}$ (Mittelsenkrechte):

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - w_1| = |z - w_2|\}.$$

- Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ und $r > |w_1 - w_2|$. Dann beschreibt

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - w_1| + |z - w_2| = r\}$$

eine Ellipse. Vergleichen Sie mit Abbildung 1.2.

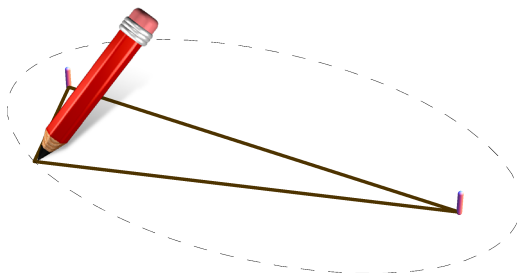


Abbildung 1.2: Wie man mit zwei Nägeln, einem Faden und einem Bleistift eine Ellipse zeichnet.

- Für $w \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} w > 0$ wird eine Parabel beschrieben durch

$$\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = |z - w|\}.$$

- Sei $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Die Zahlen $w_1 \neq w_2 \in \mathbb{C}$ werden durch einen Kreisbogen verbunden mittels

$$\left\{ z \in \mathbb{C}; \operatorname{Arg} \left(\frac{z - w_1}{z - w_2} \right) = \varphi \right\}.$$

1.3 Bekannte Funktionentypen

1.3.1 Polynome.

Funktionen der Form

$$z \mapsto p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \text{ für } z \in \mathbb{C} \quad (1.2)$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ sind definiert für alle $z \in \mathbb{C}$ und werden **Polynome** genannt. Wenn $a_n \neq 0$ sagt man, dieses Polynom habe Grad n . Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass sich ein solches Polynom zerlegen lässt in n lineare Terme:

Theorem 1.1 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei p ein Polynom vom Grad n wie in (1.2). Dann gibt es $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ derart, dass*

$$p(z) = a_n (z - z_1) (z - z_2) \cdots (z - z_n) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Ein Beweis dieses Satzes wird später kommen.

Die z_i in diesem Satz sind die Nullstellen des Polynoms p . Wenn einige der z_i gleich sind, ist ein solches z_i eine mehrfache Nullstelle.

1.3.2 Rationale Funktionen.

Funktionen der Form

$$z \mapsto \alpha(z) := \frac{p(z)}{q(z)} \text{ für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } q(z) \neq 0$$

mit Polynome p und q , werden **rationale Funktionen** genannt. Wenn z_i eine m -fache Nullstelle von q ist, und wenn $p(z_i) \neq 0$, dann nennt man z_i einen Pol vom Grad m für α .

1.3.3 Potenzreihen.

Eine Erweiterung von den Polynomen sind Funktionen, die durch **Potenzreihen** dargestellt werden:

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

So eine Formel hat nicht für jedes $z \in \mathbb{C}$ einen Wert in \mathbb{C} . Wir erinnern an ein Ergebnis aus Analysis 1:

Theorem 1.2. Sei $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} und betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $R_a \in [0, \infty]$ derart, dass

1. Wenn $|z| < R_a$, dann konvergiert diese Potenzreihe (sogar absolut).
2. Wenn $|z| > R_a$, dann divergiert diese Potenzreihe.

R_a heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe, und es gilt

$$R_a = \begin{cases} 0 & \text{falls } \ell_a = \infty, \\ \ell_a^{-1} & \text{falls } \ell_a \in (0, \infty), \\ \infty & \text{falls } \ell_a = 0, \end{cases}$$

mit $\ell_a = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$.

Im Skript zu Analysis 1 findet man einen Beweis.

Einige Standardfunktionen, die man mittels einer Potenzreihe definieren kann, sind:

| | |
|-------------------------------------|--|
| Die Exponentialfunktion: | $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ |
| Der Cosinus: | $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ |
| Der Sinus: | $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ |
| Der Cosinus hyperbolicus: | $\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$ |
| Der Sinus hyperbolicus: | $\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ |
| Die Besselfunktionen der ersten Art | $J_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+m} n! (n+m)!} z^{2n+m}$ für $m \in \mathbb{N}$ |

Diese Potenzreihen haben alle Konvergenzradius $R = \infty$.

Auch hat man:

| | |
|-----------------------|--|
| Die Binomialreihe: | $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ |
| Die Logarithmusreihe: | $\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ |

Diese beiden Potenzreihen haben Konvergenzradius $R = 1$.

1.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1.4.1 Die Definitionen

Die Definitionen von Stetigkeit und Differenzierbarkeit sind vollkommen ähnlich denen für reelle Funktionen.

Definition 1.3 (Limes). Sei $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und sei $\alpha \in \bar{A}$. Dann schreibt man $\lim_{A \ni z \rightarrow \alpha} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall z \in A : 0 < |z - \alpha| < \delta_\varepsilon \implies |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

Im Fall, dass es eine Umgebung $B_r(\alpha)$ gibt mit $r > 0$ und $B_r(\alpha) \subset A \cup \{\alpha\}$, kann man ohne weiteres $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ schreiben.

Definition 1.4 (Stetigkeit). Die Funktion $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt stetig in $\alpha \in A$, wenn $\lim_{A \ni z \rightarrow \alpha} f(z) = f(\alpha)$.

Kombiniert man diese beiden Definitionen, dann findet man für Stetigkeit:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall z \in A : |z - \alpha| < \delta_\varepsilon \implies |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon.$$

Auch die Definition von Differenzierbarkeit sollte nicht überraschen.

Definition 1.5 (Differenzierbarkeit). Sei $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und sei $\alpha \in A^\circ$. Dann heißt f (komplex) differenzierbar in α , wenn

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \text{ in } \mathbb{C} \text{ existiert.}$$

Dieser Grenzwert heißt Ableitung und wird notiert mit $f'(\alpha)$ und auch mit $\frac{d}{dz} f(\alpha)$.

Bemerkung 1.5.1. Man sollte eigentlich $\lim_{\mathbb{C} \ni z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$ schreiben, aber wir hoffen, dass aus dem Kontext klar wird, dass $z \in \mathbb{C}$ gemeint ist.

1.4.2 Vergleich komplexer und reeller Differenzierbarkeit

Bevor wir den Zusammenhang beschreiben, geben wir ein warnendes Beispiel.

Beispiel 1.6. Die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ist (reell total) differenzierbar, denn

$$\nabla \mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left\| \mathbf{f} \begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix} - \mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \operatorname{Re} z$ ist nirgends (komplex) differenzierbar:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z+h) - \operatorname{Re}(z)}{h} = \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1, \\ \lim_{\mathbb{R} \ni k \rightarrow 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} &= \lim_{\mathbb{R} \ni k \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z+ik) - \operatorname{Re}(z)}{ik} = \lim_{\mathbb{R} \ni k \rightarrow 0} \frac{0}{ik} = 0. \end{aligned}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{\mathbb{C} \ni w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

existiert also nicht.

Also, obwohl $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, ist die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dass heißt

$$x + iy \mapsto f(x + iy) = \mathbf{f}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + i \mathbf{f}_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

nicht komplex differenzierbar.

Obwohl die Definition von differenzierbar nicht sehr überraschend ist, gibt es erstaunliche Folgen.

Theorem 1.7. Sei f definiert in eine Umgebung von $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig.

- $z \mapsto f(z)$ ist (komplex) differenzierbar in α .
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x + iy) \\ \operatorname{Im} f(x + iy) \end{pmatrix}$ ist (reell) differenzierbar in $a := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \alpha \\ \operatorname{Im} \alpha \end{pmatrix}$ und

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f \\ \operatorname{Im} f \end{pmatrix} (a) = i \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f \\ \operatorname{Im} f \end{pmatrix} (a).$$

Bemerkung 1.7.1. Wir werden statt $\frac{\partial}{\partial x}$ oft ∂_x verwenden.

Bemerkung 1.7.2. Definieren wir u und v durch

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy), \quad (1.3)$$

dann kann man die letzte Aussage auch in Theorem 1.7 schreiben als: u und v sind (reell total) differenzierbar in a und außerdem gilt

$$\partial_x u(a) = \partial_y v(a) \quad \text{und} \quad \partial_y u(a) = -\partial_x v(a). \quad (1.4)$$

Die Gleichungen in (1.4) nennt man die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

Bemerkung 1.7.3. Es folgt

$$f'(\alpha) = \partial_x f(\alpha) = -i \partial_y f(\alpha) = \partial_x u(a) + i \partial_x v(a) = -i \partial_y u(a) + \partial_y v(a).$$

Beweis. (\Rightarrow) Wir zeigen erst, dass, wenn f differenzierbar ist, die partiellen Ableitungen von u und v aus (1.3) die Bedingungen in (1.4) erfüllen.

Wenn $\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$ existiert, dann existiert $\lim_{x \rightarrow a_1} \frac{f(x + ia_2) - f(a_1 + ia_2)}{x - a_1}$ und auch $\partial_x u(a)$ und $\partial_x v(a)$. Es gilt sogar

$$\partial_x u(a) + i \partial_x v(a) = \lim_{x \rightarrow a_1} \frac{f(x + ia_2) - f(a_1 + ia_2)}{x - a_1} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = f'(\alpha). \quad (1.5)$$

Ebenso existiert $\lim_{y \rightarrow a_2} \frac{f(a_1 + iy) - f(a_1 + ia_2)}{y - a_2}$ und $\partial_y u(a)$ und $\partial_y v(a)$. Und hier folgt ähnlich

$$\begin{aligned} \partial_y u(a) + i \partial_y v(a) &= \lim_{y \rightarrow a_2} \frac{f(a_1 + iy) - f(a_1 + ia_2)}{y - a_2} = \\ &= i \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(a_1 + iy) - f(a_1 + ia_2)}{i(y - a_2)} = i \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = i f'(\alpha). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Es gilt

$$i(\partial_x u(a) + i \partial_x v(a)) = i f'(\alpha) = \partial_y u(a) + i \partial_y v(a)$$

und wenn man Realteil und Imaginärteil abtrennt, folgen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

Weiterhin gilt für die Linearisierungen (wir schreiben $z = x + iy$), dass

$$\begin{aligned} f(\alpha) + (z - \alpha) f'(\alpha) &= \\ &= u(a) + iv(a) + (x + iy - a_1 - ia_2) (\partial_x u(a) + i \partial_x v(a)) \\ &= \left(u(a) + (x - a_1) \partial_x u(a) - (y - a_2) \partial_x v(a) \right) + \\ &\quad + i \left(v(a) + (x - a_1) \partial_x v(a) + (y - a_2) \partial_x u(a) \right) = \\ &= \left(u(a) + (x - a_1) \partial_x u(a) + (y - a_2) \partial_y u(a) \right) + \\ &\quad + i \left(v(a) + (x - a_1) \partial_x v(a) + (y - a_2) \partial_y v(a) \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Weil $|c + id| = \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\|$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} &\frac{|f(z) - f(\alpha) + (z - \alpha) f'(\alpha)|}{|z - \alpha|} = \\ &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} u(x, y) - (u(a) + (x - a_1) \partial_x u(a) + (y - a_2) \partial_y u(a)) \\ v(x, y) - (v(a) + (x - a_1) \partial_x v(a) + (y - a_2) \partial_y v(a)) \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\|}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

und daraus, dass “ f differenzierbar in α ” impliziert, dass (u, v) und daher auch u und v einzeln differenzierbar sind in a .

(\Leftarrow) Wenn u und v differenzierbar sind in a , dann ist $(x, y) \mapsto f(x + iy)$ reell differenzierbar in a . Setzt man $f'(\alpha) = \partial_x u(a) + i \partial_x v(a)$ und gelten die beiden Gleichungen in (1.4) folgt ähnlich wie in (1.7) und (1.8), dass

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{|f(z) - f(\alpha) + (z - \alpha) f'(\alpha)|}{|z - \alpha|} = 0.$$

□

Für komplex differenzierbare Funktionen gelten ähnliche Regeln wie für reell differenzierbare Funktionen:

- Sind f und g (komplex) differenzierbar in $\alpha \in \mathbb{C}$, so ist auch $f + g$ differenzierbar in α und

$$(f + g)'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha).$$

Auch gilt, falls $\lambda \in \mathbb{C}$ und f differenzierbar in α ist, dass λf differenzierbar in α ist mit

$$(\lambda f)'(\alpha) = \lambda f'(\alpha).$$

- Sind f und g (komplex) differenzierbar in $\alpha \in \mathbb{C}$, so ist auch $f \cdot g$ differenzierbar in α und

$$(f \cdot g)'(\alpha) = f'(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g'(\alpha).$$

- Ist g differenzierbar in α und f in $g(\alpha)$, dann ist $f \circ g$ differenzierbar in α und

$$(f \circ g)'(\alpha) = (f' \circ g)(\alpha) g'(\alpha).$$

Die Quotientenregel folgt wie üblich, wenn man Produkt- und Kettenregel kombiniert:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\alpha) = \left(f \cdot (u \circ g)\right)'(\alpha) = \frac{f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha)}{g(\alpha)^2}$$

mit $u(z) = \frac{1}{z}$ und falls $g(\alpha) \neq 0$.

Weil $\frac{d}{dz}1 = \lim_{w \rightarrow z} \frac{1-1}{w-z} = 0$ und $\frac{d}{dz}z = \lim_{w \rightarrow z} \frac{1-1}{w-z} = 1$ sind auch die Ableitungen von Polynomen wie erwartet:

$$(a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n)' = a_1 + \dots + na_nz^{n-1}.$$

Algebraische Funktionen sind (komplex) differenzierbar auf ihrem Definitionsgebiet.

Definition 1.8. Sei A eine offene Teilmenge von \mathbb{C} . Eine Funktion $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph auf A wenn sie in jeden $\alpha \in A$ komplex differenzierbar ist.

Eine Funktion $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph in $\alpha \in A$, wenn sie in eine Umgebung von α komplex differenzierbar ist.

Beispiel 1.9. Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|^2$ ist nur in 0 (komplex) differenzierbar:

$$\begin{aligned} \partial_x \operatorname{Re} |x + iy|^2 &= \partial_x (x^2 + y^2) = 2x & \text{und} & & \partial_y \operatorname{Im} |x + iy|^2 &= 0, \\ \partial_y \operatorname{Re} |x + iy|^2 &= 2y & \text{und} & & \partial_x \operatorname{Im} |x + iy|^2 &= 0, \end{aligned}$$

Die Funktion $(x, y) \rightarrow (x^2 + y^2, 0)$ ist überall (reell) differenzierbar aber nur in $(0, 0)$ sind die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt. Diese Funktion ist nirgends holomorph.

Beispiel 1.10. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \ln(|z|) + i\text{Arg}(z)$ ist holomorph:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x + iy) &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ \operatorname{Im} f(x + iy) &= \operatorname{Arg}(x + iy) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } y > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Weil man dieses Argument auf überschneidende Gebiete definiert hat, kann man für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ auf einer offenen Umgebung immer einer dieser drei Verknüpfungen bekannter Funktionen benutzen:

$$\begin{aligned} \partial_x \left(\frac{1}{2}\pi - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right) &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } y > 0, \\ \partial_x \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } x > 0, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$ sind diese Funktionen differenzierbar und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen sind erfüllt:

$$\begin{aligned} \partial_x \operatorname{Re} f(x + iy) &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \partial_y \operatorname{Im} f(x + iy), \\ \partial_y \operatorname{Re} f(x + iy) &= \frac{y}{x^2 + y^2} = -\partial_x \operatorname{Im} f(x + iy). \end{aligned}$$

Für die Ableitung finden wir

$$\begin{aligned} f'(x + iy) &= \partial_x (f(x + iy)) = \partial_x \operatorname{Re} f(x + iy) + i\partial_x \operatorname{Im} f(x + iy) \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} \end{aligned}$$

und das heißt

$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

Definition 1.11. Der komplexe Logarithmus $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ wird definiert durch

$$\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z).$$

Bemerkung 1.11.1. Man kann die Definition dieser Funktion erweitern bis $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Diese erweiterte Log-Funktion ist dann unstetig auf $(-\infty, 0]$.

Die folgenden Eigenschaften des Logarithmus zeigt man sofort:

- $\frac{d}{dz} \operatorname{Log}(z) = z^{-1}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$,
- $\exp(\operatorname{Log}(z)) = z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und
- $\operatorname{Log}(\exp(z)) = z$ für $z \in \{\mathbb{C}; |\operatorname{Im}(z)| < \pi\}$.

Die Eigenschaft

- $\operatorname{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

muss noch warten bis zu einem der nächsten Kapitel.

Bemerkung 1.11.2. Man begegnet statt $\frac{d}{dz}f(z)$ auch $\frac{\partial}{\partial z}f(z)$. Die Bedeutung ist nicht gleich. So wie man (x, y) als unabhängige Variablen betrachten kann, kann man auch (z, \bar{z}) als unabhängige Variablen betrachten. Man denke an eine Substitution durch

$$z = x + iy \text{ und } \bar{z} = x - iy,$$

mit der zugehörigen inversen Substitution

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ und } y = \frac{1}{2}i(\bar{z} - z).$$

Mit $\partial_z := \frac{\partial}{\partial z}$ und $\partial_{\bar{z}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ werden die partiellen Ableitungen nach z und nach \bar{z} angedeutet. Zum Beispiel findet man für $F(x, y) = x^2 + y^2$, die zugehörige Funktion

$$\tilde{F}(z, \bar{z}) = F(x, y) = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z\bar{z},$$

und es folgt

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{F}(z, \bar{z}) = \bar{z} \text{ und } \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\tilde{F}(z, \bar{z}) = z$$

als wären z und \bar{z} unabhängig.

Man nennt ∂_z und $\partial_{\bar{z}}$ die **Wirtinger Ableitungen**.

Allgemein folgt für $\tilde{F}(z, \bar{z}) = F(x, y)$ mit $z = x + iy$, dass

$$\partial_z \tilde{F}(z, \bar{z}) = \partial_z \left(F\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2}i(\bar{z} - z)\right) \right) = \frac{1}{2}\partial_x F(x, y) - \frac{1}{2}i\partial_y F(x, y)$$

und ebenso

$$\partial_{\bar{z}} \tilde{F}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}\partial_x F(x, y) + \frac{1}{2}i\partial_y F(x, y).$$

Existenz der Wirtinger Ableitungen heißt nicht, dass die betreffende Funktion komplex differenzierbar ist. Komplex differenzierbar hat jedoch als notwendige Bedingung, dass $\partial_{\bar{z}}\tilde{F}(z, \bar{z}) = 0$. Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen verstecken sich nämlich in $\partial_{\bar{z}}\tilde{F}(z, \bar{z}) = 0$.

Wenn man genau weiss, wie damit umzugehen, können die Wirtinger Ableitungen nützlich sein, wenn man etwas sehr kompakt aufschreiben möchte. Leider führt diese Notation auch oft zu Fehler, und dem Anfänger kann man eigentlich nur raten, die Finger davon zu lassen.

Funktionentheorie, Woche 2

$f(z)$

Elementares zu Funktionen in \mathbb{C}

2.1 Potenzreihen und Differenzieren

Später in der Vorlesung werden wir sehen, dass jede holomorphe Funktion lokal auch als eine Potenzreihe definiert ist und dass der Konvergenzradius bestimmt wird durch den Radius des Kreises, der den Rand des Gebietes berührt, wo die Funktion holomorph ist. Bis wir so weit sind, dass wir dies zeigen können, betrachten wir erst die Potenzreihen.

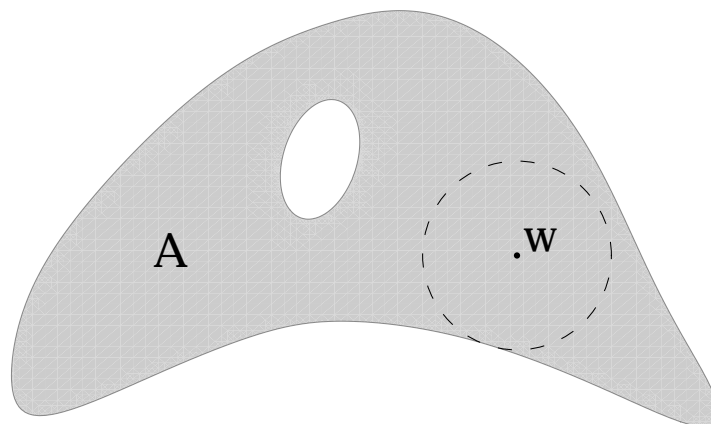


Abbildung 2.1: Wenn f holomorph auf dem offenen Gebiet A ist und $w \in A$, dann werden wir sehen, dass es eine Potenzreihe $p(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - w)^n$ gibt derart, dass $f(z) = p(z)$ für alle z in dem Kreis um w .

Da eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n$ als Funktion von z genau auf $B_R(w)$ konvergiert, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $B_R(0)$ konvergiert, ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir hier bloß diese letzte Form betrachten.

Lemma 2.1. Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Die Konvergenzradien von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ sind gleich.

Beweis. Weil

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n a_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

haben $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ den gleichen Konvergenzradius. Das Ergebnis folgt aus der Beobachtung, dass für $z \neq 0$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m n a_n z^{n-1} = z^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m n a_n z^n.$$

□

Proposition 2.2. Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und sei R_a der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann ist die Funktion $f : B_{R_a}(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $B_{R_a}(0)$ und

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} (a_n z^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Beweis. Für Differenzierbarkeit in z sollen wir zeigen, dass es für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass

$$|w - z| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| < \varepsilon.$$

Sei $|z| < R_a$ und setze $\delta_0 = \frac{1}{2}(R - |z|)$. Für $w \in B_{\delta}(z)$ gilt $|w| < R_a$, und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ ist wohldefiniert.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen Lemma 2.1 konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ und es gibt $N_1 > 0$ derart, dass für alle $N > N_1$ gilt

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| < \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (2.1)$$

Weil

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w - z},$$

$$\left| \frac{w^n - z^n}{w - z} \right| = |w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + wz^{n-2} + z^{n-1}| \leq n(R - \delta_0)^{n-1}$$

und weil $|R - \delta_0| < R$ gilt, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (R - \delta_0)^{n-1}$ wegen Lemma 2.1. Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w - z}$. Es gibt also N_2 derart, dass für alle $N > N_2$ und $w \in B_{\delta}(z)$ gilt

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w - z} \right| < \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (2.2)$$

Nehmen wir $M = \max(N_1, N_2)$. Weil $z \mapsto \sum_{n=0}^M a_n z^n$ ein Polynom ist, ist dieser Teil differenzierbar. Dann gibt es $\delta_{\frac{1}{3}\varepsilon} > 0$ derart, dass für $|z - w| < \delta_{\frac{1}{3}\varepsilon}$ folgt

$$\left| \sum_{n=0}^M a_n \frac{w^n - z^n}{w - z} - \sum_{n=1}^M n a_n z^{n-1} \right| < \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (2.3)$$

Nehmen wir $\delta = \min(\delta_0, \delta_{\frac{1}{3}\varepsilon})$, dann bekommen wir mit (2.1), (2.2) und (2.3) das gewünschte Ergebnis. □

2.2 Inverse Funktion und Graphische Darstellung

Für Funktionen $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt folgendes:

Wenn f stetig differenzierbar ist und $f'(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$, dann gibt es eine stetig differenzierbare inverse Funktion $f^{\text{inverse}} : f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Außerdem gilt

$$(f^{\text{inverse}})'(y) = \frac{1}{f'(f^{\text{inverse}}(y))} \text{ für } y \in f[a, b].$$

Dieses Ergebnis lässt sich leicht mit einer Abbildung erklären. Der Graphen zu f^{inverse} findet man durch Spiegelung an $y = x$.

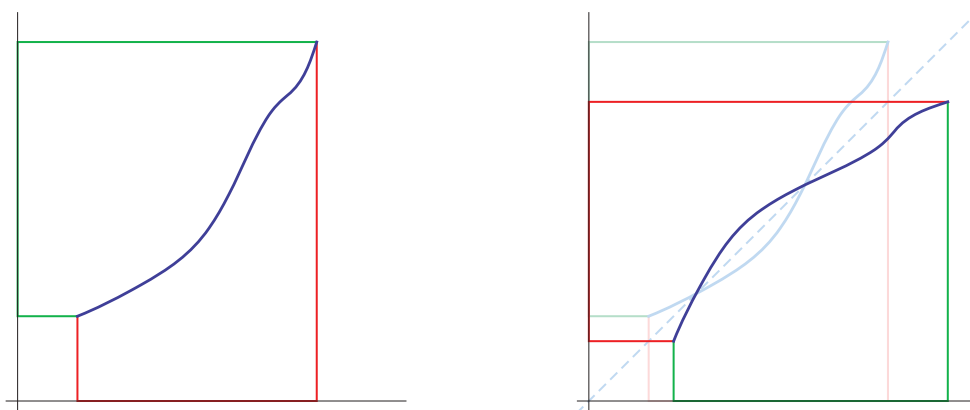


Abbildung 2.2: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und die graphische Konstruktion ihrer inversen Funktion.

Gilt etwas ähnliches für Funktionen auf \mathbb{C} ? Eine komplexe Dimension lässt sich darstellen durch zwei reelle Dimensionen. Wenn wir also eine Skizze anfertigen wollen von einer Funktion von \mathbb{C} nach \mathbb{C} , brauchen wir 4 Dimensionen. Auf direkte Weise geht das nicht, weil wir uns selten mehr als eine Projektion von \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^2 vorstellen können. Möglich wäre, der Realteil und Imaginärteil getrennt abzubilden.

Beispiel 2.3. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $z \mapsto z + z^2$. Eine andere Möglichkeit ist es, einige einfache Kurven und ihre Bilder darzustellen. Für die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z + z^2$ kann man zum Beispiel die Bilder einiger horizontalen und vertikalen Geraden betrachten. Die horizontale Gerade durch i bekommt man mit der Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = t + i$ und die Bildkurve $f \circ \gamma$ liefert eine Parabel¹:

$$f \circ \gamma(t) = t + i + (t + i)^2 = t^2 + t - 1 + i (2t + 1).$$

Das letztere Bild zeigt deutlich, dass beim Bildpunkt $-\frac{1}{4}$ etwas Besonderes passiert. Um herauszufinden was da los ist, erinnern wir uns an den Satz für die Existenz einer inversen Funktion bei Funktionen $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Der sagt aus, dass wenn F stetig differenzierbar ist und

$$\det \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(a) & \partial_2 F_1(a) \\ \partial_1 F_2(a) & \partial_2 F_2(a) \end{pmatrix} \neq 0,$$

¹Mit $x = t^2 + t - 1$ und $y = 2t + 1$ folgt $x = (\frac{1}{2}y)^2 - \frac{5}{4}$.

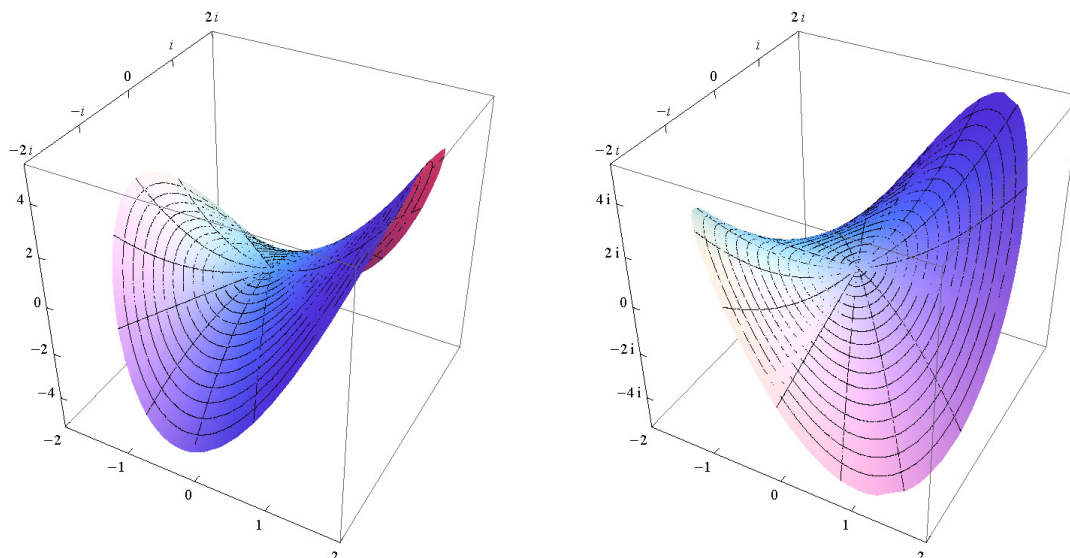


Abbildung 2.3: Der Realteil und der i -Imaginärteil zu $z \mapsto z + z^2$.

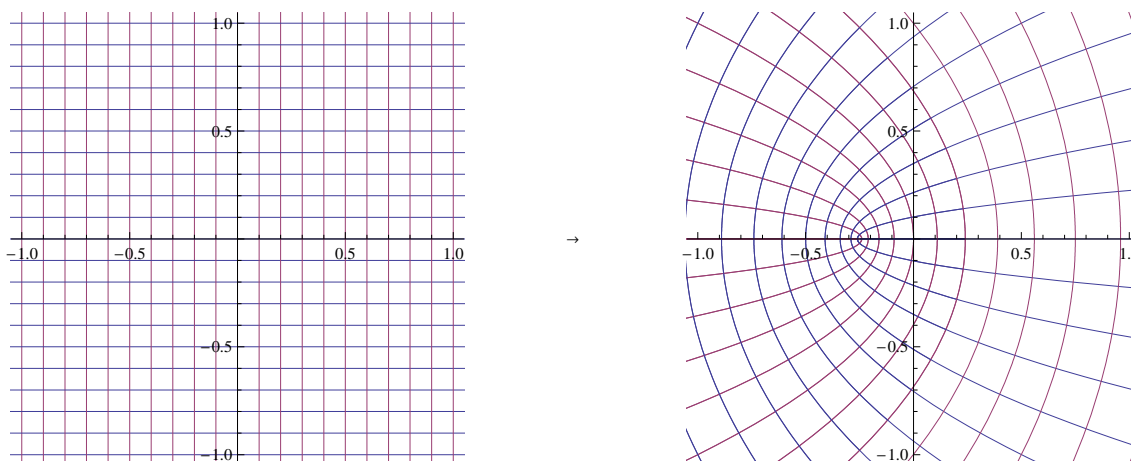


Abbildung 2.4: Die Bilder einiger Geraden unter $z \mapsto z + z^2$.

es lokal um $a \in \mathbb{R}^2$ eine inverse Funktion gibt. Wir können diesen Satz anwenden für eine Funktion $f : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, wenn wir

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(x + iy)) \\ \operatorname{Im}(f(x + iy)) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

setzen. Vergleichen wir die Ableitungen von f und F :

$$\begin{cases} f'(x + iy) = \partial_x f(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) \\ f'(x + iy) = -i\partial_y f(x + iy) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y) \end{cases} \quad (2.5)$$

und

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Man erkennt die Cauchy-Riemann Gleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ in (2.5) und findet

$$\det(F') = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = (\operatorname{Re} f')^2 + (\operatorname{Im} f')^2 = |f'|^2.$$

Wenn $|f'(z_0)| \neq 0$ gilt, hat F bei $(\operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0)$ also lokal eine Inverse. Setzen wir $G = F^{\text{invers}}$. Definieren wir g durch

$$g(x + iy) := G_1(x, y) + iG_2(x, y),$$

dann ist g lokal diese inverse Funktion für f . Wenn $\det(F') \neq 0$ gilt, ist G auch differenzierbar und es folgt mit (2.5), dass

$$\begin{aligned} G' \circ F &= (F')^{-1} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(F')} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|f'|^2} \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ -v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_x}{u_x^2+v_x^2} & \frac{-u_y}{u_y^2+v_y^2} \\ \frac{-v_x}{u_x^2+v_x^2} & \frac{v_y}{u_y^2+v_y^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Auch folgt, dass die Cauchy-Riemann Gleichungen für f , wenn $f' \neq 0$ gilt, implizieren, dass die Cauchy-Riemann Gleichungen für g erfüllt sind:

$$\frac{u_x}{u_x^2+v_x^2} = \frac{v_y}{u_y^2+v_y^2} \quad \text{und} \quad \frac{-v_x}{u_x^2+v_x^2} = \frac{u_y}{u_y^2+v_y^2}.$$

Dies bedeutet, dass g komplex-differenzierbar ist, und dass

$$g' \circ f = \frac{u_x}{u_x^2+v_x^2} + i \frac{-v_x}{u_x^2+v_x^2} = \frac{1}{u_x+iv_x} = \frac{1}{f'}.$$

Wir können folgern, dass das folgende Ergebnis gilt.

Proposition 2.4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wenn $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist in $\alpha \in U$, f stetig und $f'(\alpha) \neq 0$, dann gibt es lokal eine inverse Funktion g . Genauer gesagt:

- es gibt $s > 0$ derart, dass $f : B_s(\alpha) \rightarrow f(B_s(\alpha))$ bijektiv ist und dass $f(B_s(\alpha))$ eine offene Umgebung von $f(\alpha)$ ist.

Für die inverse Funktion $g := f^{\text{inverse}} : f(B_s(\alpha)) \rightarrow B_s(\alpha)$ gilt

$$g'(f(\alpha)) = f'(\alpha)^{-1}.$$

Bemerkung 2.4.1. Mit dem jetzigen Kenntnisstand benötigen wir die Annahme, dass f' stetig ist. Später werden wir sehen, dass diese Annahme überflüssig ist.

Beweis. Wenn f' stetig ist, dann setzen wir F wie in (2.4) und gehen voran wie oben. \square

Kommen wir zurück auf das Beispiel $f(z) = z + z^2$. Es gilt $f'(z) = 1 + 2z$ und $f'(z) = 0$ für $z = -\frac{1}{2}$. Es folgt, dass $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$. Man kann diese Proposition für $\alpha = -\frac{1}{2}$ nicht anwenden, sondern darüber hinaus kann man sich davon überzeugen, dass es genau um $f(\alpha)$ lokal keine inverse Funktion gibt.

2.3 Einige elementare Funktionen

- Die reelle Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ von $[0, \infty)$ zu $[0, \infty)$ ist definiert wie folgt:

$$y := \sqrt{x} \text{ ist die einzige nicht-negative Zahl in } \mathbb{R} \text{ mit } y^2 = x.$$

Die Gleichung $y^2 = x$ hat auch noch eine andere Lösung (jedenfalls für $x \neq 0$) und die nennt man $-\sqrt{x}$.

Wenn man eine komplexe Funktion $z \mapsto \sqrt{z}$ definieren möchte, ist es nicht mehr so klar, welche der beiden Möglichkeiten man nehmen sollte. Benutzen wir die Schreibweise mit Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ sieht man leicht, dass sowohl

$$\left(\sqrt{r}e^{i\frac{1}{2}\varphi}\right)^2 = z \text{ als auch } \left(\sqrt{r}e^{i\frac{1}{2}(\varphi+\pi)}\right)^2 = z.$$

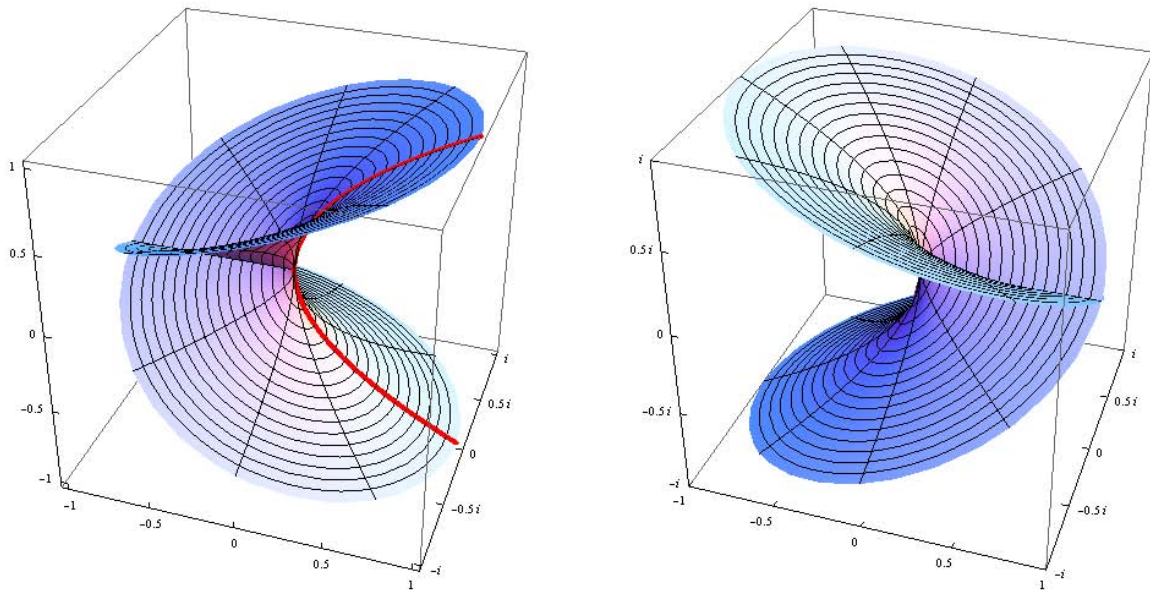


Abbildung 2.5: Der Realteil und Imaginärteil zur mehrwertigen „ $z \mapsto \sqrt{z}$ “. In Rot findet man die reellen Funktionen $x \mapsto \sqrt{x}$ und $x \mapsto -\sqrt{x}$.

Vielleicht möchte man nur die erste Lösung als Quadratwurzel definieren. Aber was macht man dann mit \sqrt{z} für $z = 1e^{i2\pi}$? Nehmen wir $\sqrt{1e^{i2\pi}} = \sqrt{1e^{i\pi}} = -1$ oder doch 1? Eine Möglichkeit wäre, mehrwertige Funktionen zuzulassen:

$$\sqrt{re^{i\varphi}} = \left\{ \sqrt{r}e^{i\frac{1}{2}\varphi}, -\sqrt{r}e^{i\frac{1}{2}\varphi} \right\} \text{ für } r \geq 0 \text{ und } \varphi \in (-\pi, \pi].$$

- Für die dritte Wurzel hätte man so drei Möglichkeiten:

$$\sqrt[3]{re^{i\varphi}} = \left\{ \sqrt[3]{r}e^{i\frac{1}{3}\varphi}, \sqrt[3]{r}e^{i\frac{1}{3}\varphi+i\frac{2}{3}\pi}, \sqrt[3]{r}e^{i\frac{1}{3}\varphi+i\frac{4}{3}\pi} \right\}.$$

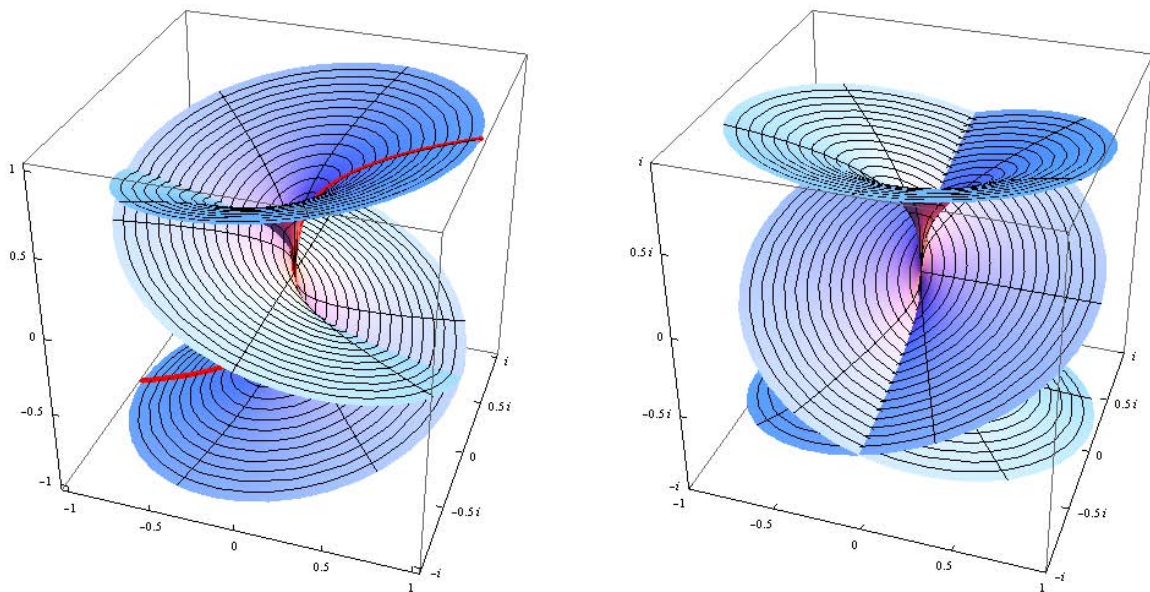


Abbildung 2.6: Der Realteil und Imaginärteil zur mehrwertigen „ $z \mapsto \sqrt[3]{z}$ “. In Rot ist die reelle Funktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ dargestellt.

- Für $z \mapsto z^{\frac{m}{n}}$ könnte man alle $w \in \mathbb{C}$ nehmen derart, dass $w^n = z^m$ und da hätte man dann n Lösungen für $z \neq 0$. Da hätte man eine n -wertige Funktion. Es bleibt die Frage wie man umgeht mit $z^{\frac{6}{4}}$. Gilt $z^{\frac{6}{4}} = z^{\frac{3}{2}}$ oder müßte man $\text{ggT}(n, m) = 1$ als Bedingung festlegen in der Definition von $z^{\frac{m}{n}}$. Und wie sollte man zum Beispiel $z^{\sqrt{2}}$ definieren?

Vereinbarung 2.5. Lasst uns festlegen, dass wir z^α nur schreiben im Fall, dass

1. $\alpha \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $z^0 = 1$ für alle z ,
2. $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
3. $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}^+$,
4. $\alpha \in \mathbb{C}$ und $z = e$.

Sonstige Potenzen soll man an Ort und Stelle genauestens erklären.

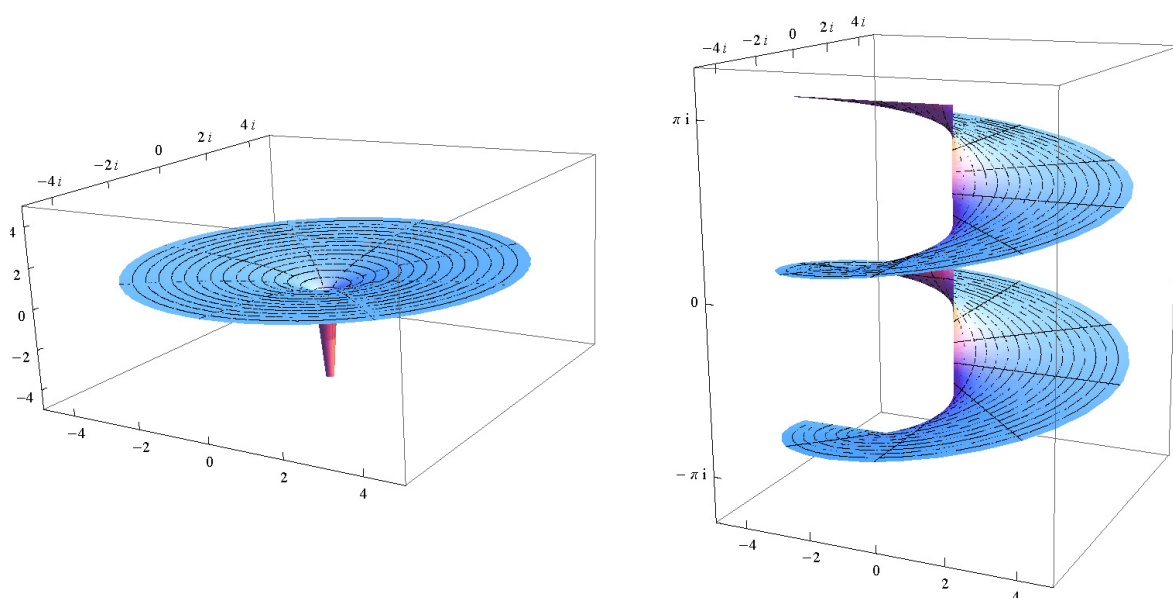


Abbildung 2.7: Der Realteil und Imaginärteil zum mehrwertigen „ $z \mapsto \log z$ “.

- Wenn wir den reellen Logarithmus erweitern wollen, dann hat man abzählbar viele mögliche Werte.

Für $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ erfüllen alle $w \in \{\log(r) + i\varphi + 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}$ die Gleichung

$$e^w = z$$

und wären berechtigt als Logarithmus von z weiter zu leben. In Definition 1.11 haben wir jedoch eine feste Kombination gewählt, nämlich

$$\text{Log}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z) \quad (2.6)$$

und mit $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. Mit Hilfe dieser Standardfunktion könnte man z^α definieren für beliebige α :

$$z^\alpha := e^{\alpha \text{Log}(z)} = e^{\alpha(\ln|z| + i \text{Arg}(z))} \text{ für } \alpha \in \mathbb{C} \text{ und } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (2.7)$$

Für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ sind diese Funktionen $z \mapsto z^\alpha$ nur stetig auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Vorsicht bleibt, denn hier geht etwas schief:

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = e^{\frac{1}{3}(\ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1))} = e^{\frac{1}{3}(0 + \pi i)} = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Für diesen komplexen Logarithmus gilt folgende Regel.

Lemma 2.6. Sei $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gibt es $k \in \{-1, 0, 1\}$ derart, dass

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w) + 2k\pi i.$$

Beweis. Weil sowohl

$$\operatorname{Arg}(zw) = \begin{cases} \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) + 2\pi & \text{für } \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \leq -\pi, \\ \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) & \text{für } -\pi < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \leq \pi, \\ \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) - 2\pi & \text{für } \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) > \pi, \end{cases}$$

als auch $\ln|zw| = \ln(|z||w|) = \ln|z| + \ln|w|$ gilt, folgt das Ergebnis aus (2.6). \square

Sei $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Lemma folgt, dass es $k \in \{-n+1, \dots, n-1\}$ gibt derart, dass

$$\operatorname{Log}(z^n) = n \operatorname{Log}(z) + 2k\pi i.$$

Die Gleichung $\ln(x^p) = p \ln x$ für $x \in \mathbb{R}^+$ und $p \in \mathbb{R}$ kann man also nicht so verallgemeinern für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.4 Gebrochen-lineare Funktionen

Definition 2.7. Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Die Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus \{-\delta/\gamma\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (2.8)$$

nennt man eine gebrochen-lineare Funktion.

Bemerkung 2.7.1. Sie werden auch Möbius-Abbildungen genannt.

Bemerkung 2.7.2. Für $\gamma = 0$ ist f eine affine Abbildung:

$$f(z) = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}.$$

Bemerkung 2.7.3. Man kann \mathbb{C} erweitern mit einem Punkt. Üblicherweise nennt man diesen zusätzlichen Punkt ∞ . Wenn man \mathbb{R} erweitert, nimmt man ∞ und $-\infty$ und kann man formell rechnen wie $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$. Das jetzige ∞ soll jedoch „Unendlich in alle Richtungen“ in \mathbb{C} erfassen. Obwohl dies ein anderes „Unendlich“ ist notiert man üblicherweise dieses letzte Unendlich auch durch ∞ . Vielleicht wäre es nützlich dieses „komplexe Unendlich“ $\infty_{\mathbb{C}}$ zu nennen. Dann wäre klar, dass $\lim_{z \rightarrow \infty_{\mathbb{C}}} e^{-z}$ nicht existiert.

Man kann sich diese Erweiterung $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ vorstellen als S^2 , die Einheitskugel in \mathbb{R}^3 . Eine konkrete Abbildung findet man durch

$$p(x + iy) = \begin{cases} \left(\frac{4x}{4+x^2+y^2}, \frac{4y}{4+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-4}{4+x^2+y^2} \right) & \text{für } x + iy \in \mathbb{C}, \\ (0, 0, 1) & \text{für } x + iy = \infty. \end{cases} \quad (2.9)$$

Eine geometrische Vorstellung von p bekommt man wie folgt. Man projiziere $(x, y, 0)$ auf der Einheitskugel mit $(0, 0, 1)$ als Mittelpunkt mittels einer Geraden zum Nordpol. Anschließend senkt man die Kugel um 1.

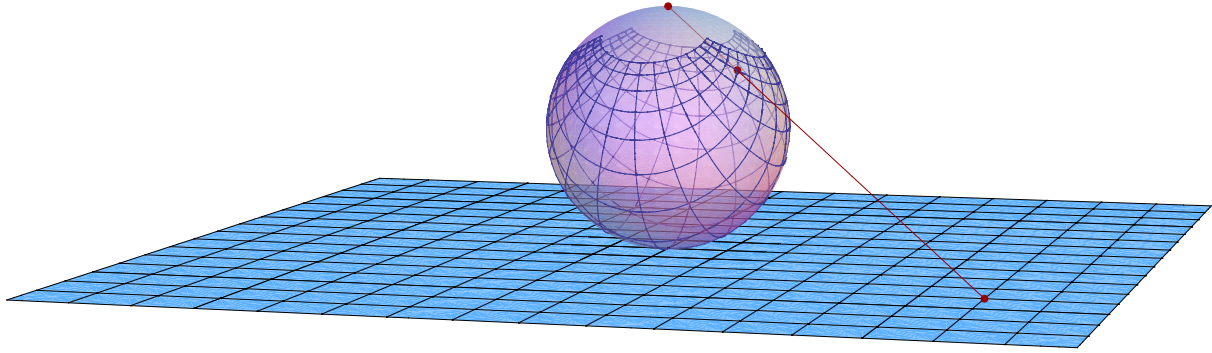


Abbildung 2.8: \mathbb{C} als \mathbb{R}^2 und die Projektion aus (2.9) auf der Einheitssphäre um $(0, 0, 1)$.

2.4.1 Gebrochen-lineare Funktionen auf $\widehat{\mathbb{C}}$

Wir betrachten f in (2.8) für $\gamma \neq 0$. Auf $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird f erweitert zu f^* durch

$$f^*(z) = \begin{cases} \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} & \text{für } z \neq -\delta/\gamma, \\ \infty & \text{für } z = -\delta/\gamma, \\ \alpha/\gamma & \text{für } z = \infty. \end{cases} \quad (2.10)$$

Auch die Abbildung $f^* : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ in (2.10) nennt man eine *gebrochen-lineare Funktion*. Auch hier unter der Bedingung, dass $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Lemma 2.8. Seien $f^*, g^* : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ gebrochen-lineare Funktionen mit f^* wie in (2.10) und $g^*(z) = \frac{\tilde{\alpha}z + \tilde{\beta}}{\tilde{\gamma}z + \tilde{\delta}}$ etc. Dann findet man

$$(f^* \circ g^*)(z) = \frac{(\alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\gamma})z + (\alpha\tilde{\beta} + \beta\tilde{\delta})}{(\gamma\tilde{\alpha} + \delta\tilde{\gamma})z + (\gamma\tilde{\beta} + \delta\tilde{\delta})} \text{ etc.,}$$

und $(\alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\gamma})(\gamma\tilde{\beta} + \delta\tilde{\delta}) - (\gamma\tilde{\alpha} + \delta\tilde{\gamma})(\alpha\tilde{\beta} + \beta\tilde{\delta}) \neq 0$. Also ist auch $f^* \circ g^*$ eine gebrochen-lineare Funktion.

Beweis. Geradeaus Rechnen liefert die Formel und außerdem findet man, dass

$$\begin{aligned} (\alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\gamma})(\gamma\tilde{\beta} + \delta\tilde{\delta}) - (\gamma\tilde{\alpha} + \delta\tilde{\gamma})(\alpha\tilde{\beta} + \beta\tilde{\delta}) &= \det \begin{pmatrix} (\alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\gamma}) & (\alpha\tilde{\beta} + \beta\tilde{\delta}) \\ (\gamma\tilde{\alpha} + \delta\tilde{\gamma}) & (\gamma\tilde{\beta} + \delta\tilde{\delta}) \end{pmatrix} = \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\tilde{\alpha}\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\tilde{\gamma}) \neq 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 2.9. Wenn $f^* : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine gebrochen-lineare Funktion ist, dann existiert $(f^*)^{\text{invers}} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ und $(f^*)^{\text{invers}}$ ist eine gebrochen-lineare Funktion.

Beweis. Weil

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\frac{\alpha}{\theta} z + \frac{\beta}{\theta}}{\frac{\gamma}{\theta} z + \frac{\delta}{\theta}},$$

und weil man $\theta \in \mathbb{C}$ so wählen kann, dass $\theta^2 = \alpha\delta - \beta\gamma$ gilt, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 1, \quad (2.11)$$

Hat man im letzten Lemma die Ähnlichkeit mit komplexen 2×2 -Matrizen bemerkt und erinnert man sich, dass, wenn (2.11) gilt, die Inverse wie folgt ist

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

so folgt

$$(f^*)^{\text{invers}}(w) = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha} \text{ etc.}$$

□

Bemerkung 2.9.1. Zu der Ähnlichkeit mit Matrizen: (ge.li.Fu., \circ) und $SL(2; \mathbb{C})$ sind isomorph als Gruppe. $SL(2; \mathbb{C})$ ist die spezielle lineare Gruppe vom Grad 2 über \mathbb{C} , oder anders gesagt, die 2×2 Matrizen mit Koeffizienten aus \mathbb{C} und Determinante 1 und versehen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung.

Die gebrochen-linearen Funktionen sind zusammengestellt mittels drei Typen von Standardfunktionen:

- Für $\gamma \neq 0$ gilt $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha z + \beta/\alpha}{\gamma z + \delta/\alpha} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma} \frac{1}{\gamma z + \delta}$.
- Für $\gamma = 0$ folgt $\alpha\delta \neq 0$ und $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}$. In diesem Fall setzt man $f^*(\infty) = \infty$.

Im ersten Fall kann man die Funktion wie folgt zusammensetzen:

$$\begin{array}{ll} \gamma_1: & z \mapsto \gamma z \\ \gamma_2: & w \mapsto w + \delta \\ \gamma_3: & u \mapsto u^{-1} \\ \gamma_4: & v \mapsto -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma} v \\ \gamma_5: & t \mapsto t + \frac{\alpha}{\gamma} \end{array}$$

Man hat $f = \gamma_5 \circ \gamma_4 \circ \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1$. Den zweiten Fall kann man noch einfacher angehen.

Die Standardfunktionen, die hier erscheinen, kann man wie folgt beschreiben:

- *Verschiebungen.* Sei $w \in \mathbb{C}$ und betrachte $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z + w$. Man erweitert durch $f^*(\infty) = \infty$. Dazu gehören γ_2 und γ_5 .
- *Drehskalierungen.* Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und betrachte $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = wz$. Auch hier kann man erweitern durch $f^*(\infty) = \infty$. Eine Drehung mit Winkel φ kann man darstellen durch $z \mapsto e^{i\varphi} z$ und eine Skalierung durch $z \mapsto rz$ mit $r \in \mathbb{R}^+$. Für $w = |w| e^{i\text{Arg}w} \neq 0$ findet man eine Drehskalierung. γ_1 und γ_4 sind solche Funktionen.
- *Die Inversion* $\gamma_3: f^*(z) = z^{-1}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f^*(0) = \infty$, $f^*(\infty) = 0$.

2.4.2 Eigenschaften von gebrochen-linearen Funktionen

Theorem 2.10. *Gebrochen-lineare Funktionen bilden Kreise und Geraden ab auf Kreise und Geraden.*

Bemerkung 2.10.1. Eine Gerade in \mathbb{C} wird in $\widehat{\mathbb{C}}$ erweitert durch ∞ dazuzunehmen. Mit der Projektion in Abbildung 2.8 werden alle Kreise und Geraden in $\widehat{\mathbb{C}}$ zu Kreisen auf der Sphäre.

Bevor wir Theorem 2.10 beweisen, brauchen wir das folgende Ergebnis.

Lemma 2.11. *Sei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C}$ mit $|\beta|^2 > c_1 c_2$ und setze*

$$M = \{z \in \mathbb{C}; c_1 z \bar{z} - \bar{\beta} z - \beta \bar{z} + c_2 = 0\}. \quad (2.12)$$

1. Für $c_1 \neq 0$ und $|\beta|^2 > c_1 c_2$ beschreibt M einen Kreis in \mathbb{C} .
2. Für $c_1 = 0$ und $\beta \neq 0$ beschreibt M eine Gerade in \mathbb{C} .
3. Jeden Kreis und jede Gerade in \mathbb{C} kann man auf diese Art darstellen.

Beweis. Für $c_1 \neq 0$ und $|\beta|^2 > c_1 c_2$ setzt man $r = \sqrt{c_1^{-2} (|\beta|^2 - c_1 c_2)}$ und (2.12) liefert einen Kreis mit Radius r :

$$\begin{aligned} |z - c_1^{-1} \beta|^2 &= (z - c_1^{-1} \beta) (\bar{z} - c_1^{-1} \bar{\beta}) = \\ &= c_1^{-1} (c_1 z \bar{z} - \bar{\beta} z - \beta \bar{z} + c_1^{-1} \beta \bar{\beta}) = c_1^{-2} (\beta \bar{\beta} - c_1 c_2) = r^2 \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Für $c_1 = 0$ und $\beta \neq 0$ finden wir eine Gerade:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} \beta \\ \operatorname{Im} \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{pmatrix} = \operatorname{Re} (\bar{\beta} z) = \frac{1}{2} (\bar{\beta} z + \beta \bar{z}) = \frac{1}{2} c_2. \quad (2.14)$$

Es möge klar sein, dass man für $c_1 = 0$ durch geschickte Wahl von $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $c_2 \in \mathbb{R}$ in (2.14) jede Gerade finden kann. Setzen wir in (2.13) $c_1 = 1$ ein, so wird β der Mittelpunkt des Kreises und mit $c_2 = |\beta|^2 - r^2$ folgt als Radius r . \square

Beweis von Theorem 2.10. Für Verschiebungen und Drehskalierungen sieht man direkt, dass Kreise auf Kreisen und Geraden auf Geraden abgebildet werden. Nur zu der Inversion soll man einen Beweis liefern. Und nur bei der Inversion spielt ∞ eine Rolle: $0 \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto 0$.

Nachdem wir gesehen haben, dass die Formel in (2.12) tatsächlich alle Kreise und Geraden beschreibt, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass die Bilder unter $z \mapsto z^{-1}$ eine ähnliche Formel ergeben. Setzen wir $w = z^{-1}$, dann ändert sich (2.12) in

$$c_1 \frac{1}{w \bar{w}} - \bar{\beta} \frac{1}{w} - \beta \frac{1}{\bar{w}} + c_2 = 0.$$

Diese Gleichung kann man auch darstellen als

$$c_2 w \bar{w} - \beta w - \bar{\beta} \bar{w} + c_1 = 0. \quad (2.15)$$

Weil die Bedingung $|\bar{\beta}|^2 > c_2 c_1$ erfüllt ist, ist auch (2.15) wiederum die Gleichung eines Kreises oder einer Geraden.

Nur beim Bild von $z = 0$ und $z = \infty$ soll man etwas aufpassen. Wenn $z = 0$ im Original liegt, dann gilt $c_2 = 0$ und es folgt $-\beta w - \bar{\beta} \bar{w} + c_1 = 0$, eine Gerade. In $\widehat{\mathbb{C}}$ ist ∞ Teil dieser Geraden. Wenn $z = \infty$ im Original liegt, gilt $c_1 = 0$ und folgt $c_2 w \bar{w} - \beta w - \bar{\beta} \bar{w} = 0$. Dann finden wir, dass $w = 0$ auf der Bildkurve liegt. \square

Funktionentheorie, Woche 3

$f(z)$

Folgen, Fraktale, Kurven und Integrale

3.1 Nullstellensuche mit Newton und anderen Folgen

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann man Nullstellen finden mittels des Newton-Verfahrens. Man wählt geschickt einen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$ und approximiert die Nullstelle durch

$$x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Eine ähnliche Prozedur könnte man auch für $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ versuchen. Man wählt geschickt einen Anfangswert $z_0 \in \mathbb{C}$ und approximiert die Nullstelle durch

$$z_{n+1} = z_n - (f'(z_n))^{-1} f(z_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Nimmt man den Realteil und den Imaginärteil, findet man via $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = x_n + iy_n - \frac{\overline{f'(x_n + iy_n)}}{|f'(x_n + iy_n)|^2} f(x_n + iy_n)$$

und mit Cauchy-Riemann, dass

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{-1}{|f'(x_n + iy_n)|^2} \begin{pmatrix} u_x(x_n, y_n) & v_x(x_n, y_n) \\ -v_x(x_n, y_n) & u_x(x_n, y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x_n, y_n) \\ v(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \quad (3.1) \\ & = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{u_x(x_n, y_n)^2 + v_x(x_n, y_n)^2} \begin{pmatrix} v_y(x_n, y_n) & -u_y(x_n, y_n) \\ -v_x(x_n, y_n) & u_x(x_n, y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x_n, y_n) \\ v(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x(x_n, y_n) & u_y(x_n, y_n) \\ v_x(x_n, y_n) & v_y(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u(x_n, y_n) \\ v(x_n, y_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das ist wieder genau die Definition vom Newton-Verfahren in 2 Dimensionen.

Bemerkung 3.0.1. Man kann sich diese Formel auch noch anders erklären. Wenn wir eine Nullstelle einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ suchen, entspricht das der Nullstellensuche für $\sqrt{u^2 + v^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$.

Die Darstellung der Funktion $\sqrt{u^2 + v^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man die Funktionenlandschaft. Wenn man in den Bergen wandert und man möchte den kürzesten Weg hinunter nehmen, dann gehe man gerade den Hang hinunter. Eine mathematische Wanderung in der Funktionenlandschaft gibt da als Richtung $-\nabla(u^2 + v^2)$. Bemerke, dass für $u^2 + v^2 \neq 0$ sowohl $-\nabla(u^2 + v^2)$ als auch $-\nabla\sqrt{u^2 + v^2}$ die gleiche Richtung liefern. Mit Cauchy-Riemann finden wir

$$-\nabla(u^2 + v^2) = 2 \begin{pmatrix} u_x u + v_x v \\ u_y u + v_y v \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ -v_x & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Diese gleiche Richtung findet man in (3.1). Dieses sogenannte *Verfahren des steilsten Abstiegs*¹, auch Gradientenverfahren genannt, findet breite Anwendung in der numerischen Mathematik.

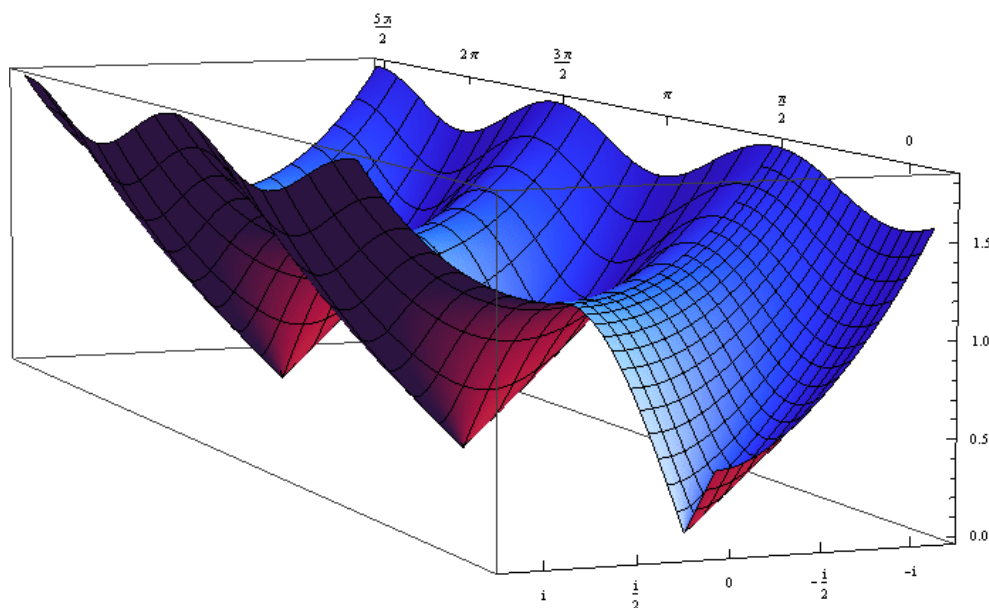


Abbildung 3.1: Die Funktionenlandschaft zu \sin oder die Skizze zu $z \mapsto |\sin z|$. Für eine bessere Darstellung ist eine Ecke herausgeschnitten.

Jedes Polynom von Grad n hat n komplexe Nullstellen aber leider bekommt man nicht bei jedem Anfangswert eine Nullstelle. Zum Beispiel könnte man mit diesem Newton-Verfahren eine Nullstelle von $p(z) = z^2 + 1$ suchen. Wenn man anfängt mit $z_0 \in \mathbb{R}$ und approximiert durch

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 + 1}{2z_n} \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

dann gilt $z_n \in \mathbb{R}$ (oder die Approximation ist zusammengebrochen, weil $z_{n_0} = 0$ erreicht worden ist). Man kann sich die Frage stellen, für welche Anfangswerte diese Iteration zu welcher Nullstelle konvergiert.

3.2 Iterative Folgen

Statt eine iterative Folge für die Nullstellen zu betrachten, kann man auch eine beliebige iterativ definierte Folge anschauen. Sei zum Beispiel p ein Polynom. Dann kann man sich die nächste Frage stellen:

¹Das Verfahren des steilsten Abstiegs heißt auf Englisch “the method of steepest descent” oder auch “gradient descent”.

Für welche z_0 ist die Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch $z_{n+1} = p(z_n)$, beschränkt?

Diese Frage scheint einfach aber sogar für ein Polynom zweiten Grades ist sie nicht unbedingt so einfach zu beantworten. Manchmal lassen sich durch ad-hoc Beweise Gebiete festlegen für z_0 , wo die Folge nicht oder gerade doch beschränkt ist.

Beispiel 3.1. Betrachten wir $p(z) = z^2 - 1$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ die Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, iterativ definiert durch

$$z_{n+1} = p(z_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| \geq 2$ zeigt man mit vollständiger Induktion, dass $|z_n| \geq n + 2$. Denn $|z_0| \geq 2$ gilt und, angenommen es gilt $|z_n| \geq n + 2$, so folgt

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 - 1| \geq |z_n^2| - 1 \geq (n + 2)^2 - 1 = n^2 + 4n + 3 \geq n + 3.$$

Also ist die Folge nicht beschränkt.

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| \leq \frac{1}{3}$ zeigt man mit vollständiger Induktion, dass $|z_{2n}| \leq \frac{1}{3}$. Denn $|z_0| \leq \frac{1}{3}$ gilt und, angenommen es gilt $|z_{2n}| \leq \frac{1}{3}$, so folgt

$$\begin{aligned} |z_{2(n+1)}| &= |z_{2n+1}^2 - 1| = |(z_n^2 - 1)^2 - 1| = |z_n^4 - 2z_n^2| = |z_n|^2 |z_n^2 - 2| \leq \\ &\leq |z_n|^2 (|z_n^2| + 2) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\right) = \frac{19}{81} \leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Für die ungeraden Terme gilt $|z_{2n+1}| = |z_{2n}^2 - 1| \leq |z_{2n}|^2 + 1 \leq \frac{1}{9} + 1 = \frac{10}{9}$. Also ist $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Was passiert bezüglich der Beschränktheit der Folge bei den Anfangswerten z_0 , wenn $\frac{1}{3} < |z_0| < 2$? Eine Antwort ist nicht einfach.

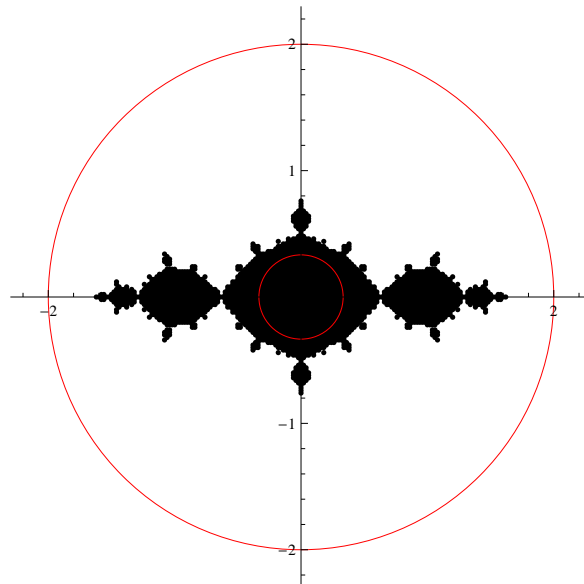


Abbildung 3.2: Ein Bild zu Beispiel 3.1

Gaston Julia und Pierre Fatou bemerkten 1918, dass die Menge der Anfangswerte, bei denen so eine iterativ definierte Folge beschränkt bleibt, sehr wild sein kann. Für $p(z) = z^2 - 1.25$ findet man eine Skizze dieser Menge in Abbildung 3.3. Der Rand einer solchen Menge wird *Julia-Menge* genannt. Für $p(z) = z^2 - c$ hat diese Julia-Menge fast

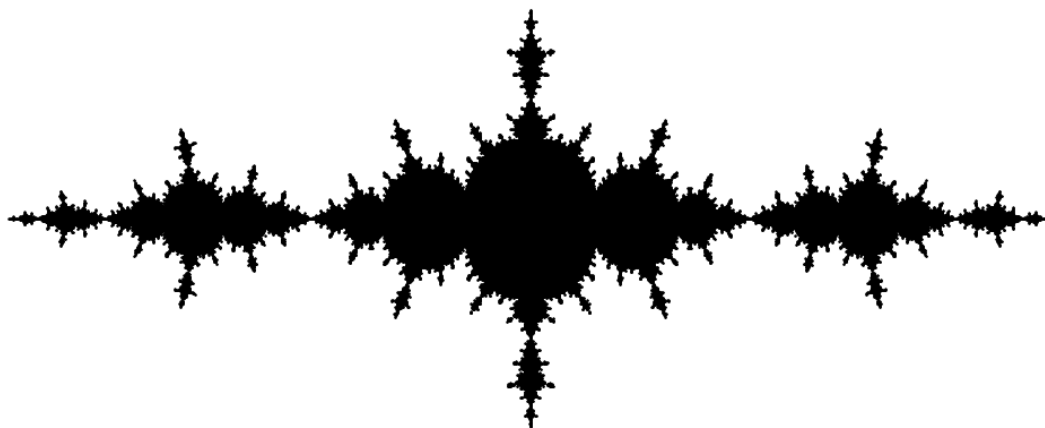


Abbildung 3.3: Ein Bild zur Julia-Menge der Anfangswerte, für die bei $z_{n+1} = z_n^2 - 1.25$ die Folge beschränkt bleibt.

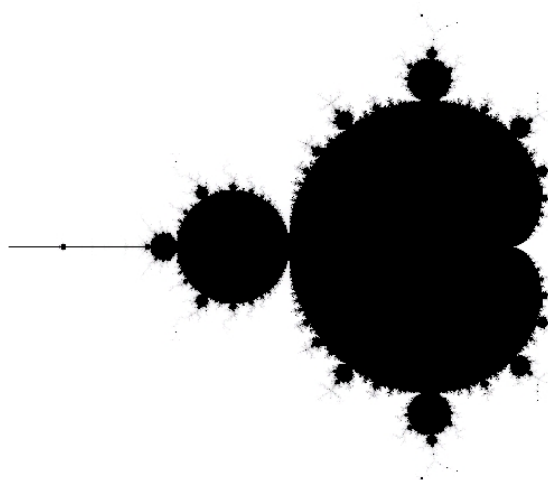


Abbildung 3.4: Ein Bild zur Mandelbrot-Menge, hergestellt durch ein Java-applet auf <http://www.h-schmidt.net/MandelApplet/mandelapplet.html>.

immer eine fraktale Struktur. „Fraktal“ bedeutet, dass die Hausdorf-Dimension dieser Julia-Menge nicht ganzzahlig ist.

Die Menge der $c \in \mathbb{C}$, für die die Julia-Menge zusammenhängend ist, nennt man die Mandelbrot-Menge. Auch der Rand der *Mandelbrot-Menge* ist fraktal.

Es führt zu weit dieses Thema hier ausgiebig mathematisch (oder künstlerisch) anzugehen.

3.3 Kurven

Definition 3.2. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nennt man eine (komplexe) Kurve; $\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt und $\gamma(b)$ Endpunkt.

Bemerkung 3.2.1. Man wäre geneigt, die Bildmenge $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t); t \in [a, b]\}$ als Kurve zu definieren. Dann kann man jedoch nicht mehr unterscheiden in welcher Richtung oder sogar wie oft die Kurve durchlaufen wird.

Definition 3.3. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ nennt man zusammenhängend, wenn es für jede $z_1, z_2 \in A$ eine Kurve gibt mit z_1 als Anfangspunkt und z_2 als Endpunkt, bei der die Bildmenge in A liegt.

Beispiel 3.4. Die Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\gamma(t) = (1 - t^2)(e^{(3+10i)t} + i)$, verbindet $1 + i$ mit 0 .

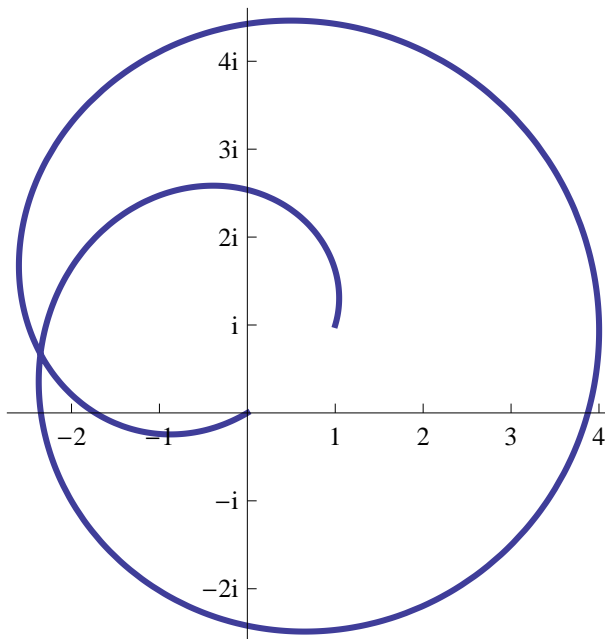


Abbildung 3.5: Eine Skizze der Bildmenge der Kurve aus Beispiel 3.4.

Definition 3.5. Einige spezielle Kurven $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sind wie folgt definiert.

- Wenn γ stetig (reell) differenzierbar ist und $|\gamma'(t)| \neq 0$, dann nennt man γ eine glatte Kurve.
- Wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ nennt man die Kurve geschlossen.
- Wenn $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $[a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv sind², heißt sie einfach.
- Wenn sie geschlossen und einfach ist, nennt man sie eine Jordan-Kurve.

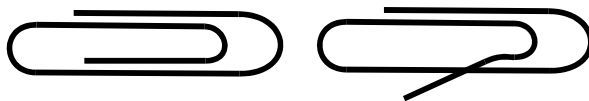


Abbildung 3.6: Die Bildmenge einer einfachen und einer nicht-einfachen Kurve

Bemerkung 3.5.1. Die Abbildung $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar, wenn $\operatorname{Re} \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , die rechte Ableitung in a und die linke Ableitung in b existieren, und

$$\gamma^*(t) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\gamma(a + \varepsilon) - \gamma(a)}{\varepsilon} & \text{für } t = a, \\ \gamma'(t) & \text{für } t \in (a, b), \\ \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \frac{\gamma(b + \varepsilon) - \gamma(b)}{\varepsilon} & \text{für } t = b, \end{cases}$$

eine stetige Funktion auf $[a, b]$ ist.

²Keine Doppelpunkte mit der Ausnahme, dass Endpunkt und Anfangspunkt identisch sein dürfen.

Bemerkung 3.5.2. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Jordan-Kurve. Der *Jordansche Kurvensatz* besagt, dass $\mathbb{C} \setminus \gamma[a, b]$ zwei Komponenten hat: Das beschränkte Innengebiet und das unbeschränkte Außengebiet.

Bemerkung 3.5.3. In Analysis 2 haben wir gesehen, dass man eine Tangentialrichtung an einer Kurve $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ an der Stelle $x(t)$ findet durch $x'(t)$. Wendet man dies an auf $x(t) = (\operatorname{Re} \gamma(t), \operatorname{Im} \gamma(t))$, dann folgt $x'(t) = (\operatorname{Re} \gamma'(t), \operatorname{Im} \gamma'(t))$. Anders gesagt, die Tangentialrichtung an der Kurve γ an der Stelle $\gamma(t)$ ist die (komplexe) Zahl $\gamma'(t)$.

Lemma 3.6. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung und seien $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\zeta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei glatte Kurven, die sich für $t \in (a, b)$ und $s \in (c, d)$ schneiden in α . Also $\alpha = \gamma(t) = \zeta(s)$. Nehme an, dass $f'(\alpha) \neq 0$.

Dann schneiden sich die Bildkurven $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $f \circ \zeta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ für $t \in (a, b)$ und $s \in (c, d)$ an der Stelle $f(\alpha)$ mit dem gleichen Winkel und mit gleicher Orientierung wie γ und ζ für $t \in (a, b)$ und $s \in (c, d)$ an der Stelle α .

Beweis. Die Ableitung $\gamma'(t)$ gibt die Richtung der Kurve γ an der Stelle α . Der Winkel und die Orientierung in α zwischen γ und ζ wird also bestimmt durch

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{\gamma'(t)}{\zeta'(s)} \right) = \operatorname{Arg}(\gamma'(t)) - \operatorname{Arg}(\zeta'(s)) + 2k\pi.$$

Weil

$$\frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \zeta)'(s)} = \frac{(f' \circ \gamma(t)) \gamma'(t)}{(f' \circ \zeta(s)) \zeta'(s)} = \frac{f'(\alpha) \gamma'(t)}{f'(\alpha) \zeta'(s)} = \frac{\gamma'(t)}{\zeta'(s)},$$

folgt

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \zeta)'(s)} \right) = \operatorname{Arg} \left(\frac{\gamma'(t)}{\zeta'(s)} \right),$$

und das gewünschte Ergebnis. \square

Definition 3.7. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ nennt man eine stückweise glatte Kurve, wenn es endlich viele $a_i \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

derart, dass $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]} : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$ für jedes $i \in \{0, n-1\}$ eine glatte Kurve ist.

Es wird nützlich sein, wenn wir Kurven auch in umgekehrter Richtung folgen können oder auch zwei Kurven verknüpfen können.

Notation 3.8. • Für eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir die Kurve $-\gamma : [a, b]$ durch

$$(-\gamma)(t) = \gamma(b + a - t).$$

- Für zwei Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\zeta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(b) = \zeta(c)$ definieren wir die Kurve $\gamma + \zeta : [a, b + d - c]$ durch

$$(\gamma + \zeta)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [a, b], \\ \zeta(t - b + c) & \text{für } t \in (b, b + d - c]. \end{cases}$$

- Für eine geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ wird $n\gamma : [a, n(b - a) + b]$ mit $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$(n\gamma)(t) = \gamma(t - k(b - a)) \quad \text{für } t \in [a + k(b - a), b + k(b - a)] \\ \text{und } k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Bemerkung 3.8.1. Diese kurze Notation ist leider manchmal auch verwirrend, denn $(-\gamma)(t)$ ist meistens nicht identisch mit $-\gamma(t)$. Ebenso sind $(n\gamma)(t)$ und $n(\gamma(t))$ meistens verschieden.

3.4 Kurvenintegrale

Das Integral über eine komplexwertige Funktion ist definiert durch

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(g(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(g(t)) dt,$$

falls beide Integrale auf der rechten Seite definiert sind. Elementare Eigenschaften für (Riemann-)Integrale bleiben erhalten. Wenn g_1 und g_2 (Riemann-)integrierbar sind über $[a, b]$, dann ist auch $c_1 g_1 + c_2 g_2$ (Riemann-)integrierbar über $[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b (c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)) dt = c_1 \int_a^b g_1(t) dt + c_2 \int_a^b g_2(t) dt \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Auch der Hauptsatz der Integralrechnung ist gültig. Wenn $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist mit $F'(t) = f(t)$, dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Dieses Ergebnis folgt sofort, wenn man sich überlegt dass, falls g differenzierbar ist,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{Re}(g(t)) + i \operatorname{Im}(g(t))) = \operatorname{Re}(g'(t)) + i \operatorname{Im}(g'(t)).$$

Nachdem wir komplexwertige Integrale definiert haben, können wir den nächsten Schritt machen und Kurvenintegrale in \mathbb{C} definieren.

Definition 3.9. Sei $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit U offen und sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma[a, b] \subset U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Man definiert das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z) dz$ durch

$$\int_\gamma f(z) dz := \int_a^b f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt.$$

Bemerkung 3.9.1. Für eine stückweise differenzierbare Kurve wie in Definition 3.7 definiert man

$$\int_\gamma f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma[a_i, a_{i+1}]} f(z) dz.$$

Die üblichen Eigenschaften von Integrale findet man auch hier:

Lemma 3.10. 1. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Kurve und seien $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_\gamma f(z) dz + \beta \int_\gamma g(z) dz.$$

2. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Kurve und sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für $-\gamma$, definiert in Notation 3.8, gilt

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_\gamma f(z) dz$$

3. Seien $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma(b) = \delta(c)$ und sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für $\gamma + \delta$, definiert in Notation 3.8, gilt

$$\int_{\gamma+\delta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\delta} f(z) dz.$$

Die Beweise dieser Ergebnissen sind nicht besonders spannend. Man verwendet die bekannten Eigenschaften von reellen Integralen über reelle Intervallen.

Lemma 3.11. Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ derartig, dass $t \mapsto \operatorname{Re}(g(t))$ und $t \mapsto \operatorname{Im}(g(t))$ (Riemann-) integrierbar sind, dann ist auch $t \mapsto |g(t)|$ (Riemann-) integrierbar und außerdem gilt

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt.$$

Bemerkung 3.11.1. Wenn wir dieses Ergebnis auf ein Kurvenintegral für $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ anwenden, folgt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f \circ \gamma(t)| |\gamma'(t)| dt =: \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

Der letzte Ausdruck ist nur eine Abkürzung.

Beweis. Das Basteln mit Unter- und Obersummen, um zu zeigen, dass die (Riemann-) Integrierbarkeit von $\operatorname{Re} g$ und $\operatorname{Im} g$ die (Riemann-) Integrierbarkeit von $|g|$ ergibt, werden wir nicht durchführen. Angenommen, dass die Integrale existieren, setzt man $\omega = \int_a^b g(t) dt$ und bemerkt, dass

$$\int_a^b \bar{\omega} g(t) dt = \bar{\omega} \int_a^b g(t) dt = |\omega|^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |\bar{\omega}| \left| \int_a^b g(t) dt \right| &= \left| \bar{\omega} \int_a^b g(t) dt \right| = \left| \int_a^b \bar{\omega} g(t) dt \right| = \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_a^b \bar{\omega} g(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(\bar{\omega} g(t)) dt \leq \\ &\leq \int_a^b |\bar{\omega} g(t)| dt = \int_a^b |\bar{\omega}| |g(t)| dt = |\bar{\omega}| \int_a^b |g(t)| dt. \end{aligned}$$

Entweder hat man $\omega = 0$ oder man darf durch $|\bar{\omega}|$ dividieren. Beide Möglichkeiten liefern das gewünschte Ergebnis. \square

Lemma 3.12. Sei U offen und sei $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ und $\zeta : [c, d] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ einfache glatte Kurven sind mit dem gleichen Bild, das in gleicher Richtung durchlaufen wird, dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\zeta} f(z) dz.$$

„Gleiches Bild in gleicher Richtung durchlaufen“ heißt, es gib eine monoton wachsende bijektive Abbildung $s : [a, b] \rightarrow [c, d]$ mit $\gamma(t) = (\zeta \circ s)(t)$ für alle $t \in [a, b]$.

Beweis. Eine monoton wachsende bijektive Funktion $s : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ist auch stetig. Wir zeigen, dass die Funktion s hier sogar differenzierbar ist. Weil $\tau \mapsto \zeta(\tau)$ stetig differenzierbar ist, ist auch $\tau \mapsto \operatorname{Re} \zeta(\tau)$ und $\tau \mapsto \operatorname{Im} \zeta(\tau)$ stetig differenzierbar und es folgt aus dem Mittelwertsatz, dass es $\tau_{1,h}, \tau_{2,h} \in [s(t), s(t+h)]$ gibt mit

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} &= \frac{\zeta(s(t+h)) - \zeta(s(t))}{h} = \\ &= \frac{(s(t+h) - s(t)) (\operatorname{Re} \zeta'(\tau_{1,h}) + i \operatorname{Im} \zeta'(\tau_{2,h}))}{h}. \end{aligned}$$

Weil ζ' stetig und ungleich 0 ist, folgt, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} (\operatorname{Re} \zeta'(\tau_{1,h}) + i \operatorname{Im} \zeta'(\tau_{2,h}))} = \frac{\gamma'(t)}{\zeta'(s(t))}.$$

Also ist s differenzierbar (sogar stetig differenzierbar). Dann folgt aus der Substitutionsregel, dass

$$\begin{aligned} \int_{\zeta} f(z) dz &= \int_c^d (f \circ \zeta)(\tau) \zeta'(\tau) d\tau = \int_a^b (f \circ \zeta)(s(t)) \zeta'(s(t)) s'(t) dt = \\ &= \int_a^b (f \circ \zeta \circ s)(t) (\zeta \circ s)'(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.13. Sei U offen, $F : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und sei $F' = f$ auf U . Wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine stückweise glatte Kurve ist, dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis. Wenn F komplex differenzierbar ist in $\gamma(t)$ und γ reell differenzierbar in t , dann ist $F \circ \gamma$ auch reell differenzierbar in t und es gilt

$$(F \circ \gamma)'(t) = (F' \circ \gamma)(t) \gamma'(t).$$

Aus der Definition und dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F' \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = \\ &= (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) \end{aligned}$$

und damit das Ergebnis. □

Korollar 3.14. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\alpha, \beta \in U$. Wenn f auf $U \subset \mathbb{C}$ eine Stammfunktion F besitzt, dann gilt für jede Kurve γ , die α als Anfangspunkt hat, β als Endpunkt und die innerhalb von U verläuft,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\beta) - F(\alpha).$$

Beispiel 3.15. Nehmen wir $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt für jede Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(a) = \alpha$ und $\gamma(b) = \beta$, dass

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = \alpha^{-1} - \beta^{-1}.$$

Auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat $f(z) = z^{-2}$ eine Stammfunktion, nämlich $F(z) = -z^{-1}$.

Beispiel 3.16. Setze $\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) = e^{it}$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_2(t) = e^{-it}$. Beide Kurven verbinden 1 mit -1 . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\gamma_1(t)} \gamma_1'(t) dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \int_0^{\pi} i dt = \pi i, \\ \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\gamma_2(t)} \gamma_2'(t) dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{-it}} (-i e^{-it}) dt = \int_0^{\pi} -i dt = -\pi i. \end{aligned}$$

Angeblich hat $z \mapsto \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf einer Umgebung von

$$\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}.$$

Man könnte versuchen die Funktion $z \mapsto \text{Log}(z)$ als Stammfunktion zu betrachten, sollte dann aber merken, dass diese Funktion für $z \in \mathbb{R}^-$ nicht stetig ist. Nur auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ ist dieser Logarithmus differenzierbar und da ist sie sogar eine Stammfunktion von $z \mapsto z^{-1}$.

Funktionentheorie, Woche 4

$f(z)$

Kurvenintegrale und Cauchy

4.1 Stammfunktion und geschlossene Kurven

Wir haben in Korollar 3.14 gesehen, dass wenn f eine Stammfunktion hat, das Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve gleich 0 ist. Dieses Ergebnis folgt aus Lemma 3.13. In diesem Kapitel wollen wir den inversen Weg finden.

Proposition 4.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene zusammenhängende Menge. Nehmen wir an, dass $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, und dass für jede geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma[a, b] \subset U$ gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Sei $z_0 \in U$ und sei $\zeta_{z_0}^z$ irgendeine stückweise stetig differenzierbare Kurve, die z_0 innerhalb U mit z verbindet. Dann ist

$$F(z; z_0) = \int_{\zeta_{z_0}^z} f(w) dw$$

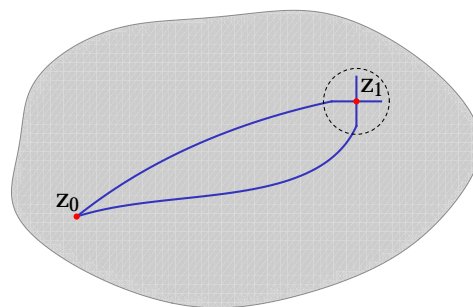
wohldefiniert für $z \in U$, es gilt $z \mapsto F(z; z_0)$ ist holomorph auf U , und $\frac{d}{dz} F(z; z_0) = f(z)$.

Beweis. Weil $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ gilt für jede geschlossene Kurve, folgt dass $F(z; z_0) = \int_{\zeta_{z_0}^z} f(w) dw$ unabhängig ist von der gewählten Kurve von z_0 nach z . Um zu zeigen, dass $z \mapsto F(z; z_0)$ differenzierbar ist in z_1 , betrachten wir zwei spezielle Kurven. Weil U offen ist, dürfen wir annehmen, dass sowohl $[z_1 - \varepsilon, z_1 + \varepsilon]$ als auch $[z_1 - i\varepsilon, z_1 + i\varepsilon]$ beide innerhalb von U liegen für ein $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Wir nehmen $\gamma_{1,t} : [-1, t]$ derart, dass

$$\gamma_{1,t}(-1) = z_0 \text{ und } \gamma_{1,t}(s) = z_1 + s \text{ für } s \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

und $\gamma_{2,t} : [-1, t]$ derart, dass

$$\gamma_{2,t}(-1) = z_0 \text{ und } \gamma_{2,t}(s) = z_1 + is \text{ für } s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$



Für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} F(z_1 + t; z_0) &= \int_{\gamma_{1,t}} f(z) dz = \int_{\gamma_{1,-\varepsilon}} f(z) dz + \int_{s=-\varepsilon}^t f(z_1 + s) ds = \\ &= \int_{\gamma_{1,0}} f(z) dz + \int_{s=0}^t f(z_1 + s) ds = \\ &= F(z_1; z_0) + \int_{s=0}^t f(z_1 + s) ds, \end{aligned}$$

und es folgt aus dem Hauptsatz der Integralrechnung, dass

$$t \mapsto \int_{\gamma_{1,t}} f(z) dz \text{ für } t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

(stetig) reell differenzierbar ist. Ebenso gilt

$$\begin{aligned} F(z_1 + it; z_0) &= \int_{\gamma_{2,t}} f(z) dz = \int_{\gamma_{2,0}} f(z) dz + \int_{s=0}^t f(z_1 + is) ids = \\ &= F(z_1; z_0) + \int_{s=0}^t f(z_1 + is) ids, \end{aligned}$$

und

$$t \mapsto \int_{\gamma_{2,t}} f(z) dz \text{ für } t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

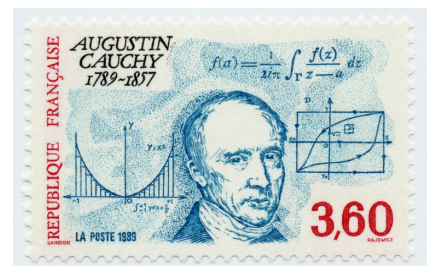
ist (stetig) reell differenzierbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x + iy; z_0) \right)_{|x+iy=z_1} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{s=0}^t f(z_1 + s) ds \right)_{|t=0} = f(z_1) \text{ und} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x + iy; z_0) \right)_{|x+iy=z_1} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{s=0}^t f(z_1 + is) ids \right)_{|t=0} = if(z_1). \end{aligned}$$

Also sind die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in z_1 erfüllt und $F(\cdot; z_0)$ ist auch komplex differenzierbar in z_1 . Außerdem gilt $F'(z; z_0) = f(z)$. \square

4.2 Der Integralsatz von Cauchy

Zitat Encyclopædia Britannica: *Cauchy's greatest contributions to mathematics, characterized by the clear and rigorous methods that he introduced, are embodied predominantly in his three great treatises: Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique (1821; "Courses on Analysis from the École Royale Polytechnique"); Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal (1823; "Résumé of Lessons on Infinitesimal Calculus"); and Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie (1826–28; "Lessons on the Applications of Infinitesimal Calculus to Geometry"). The first phase of modern rigour in mathematics originated in his lectures and researches in analysis during the 1820s. He clarified the principles of calculus and put them on a satisfactory basis by developing them with the aid of limits and continuity, concepts now considered vital to analysis.*



Bevor wir den nach Cauchy benannten Satz formulieren und beweisen können, brauchen wir:

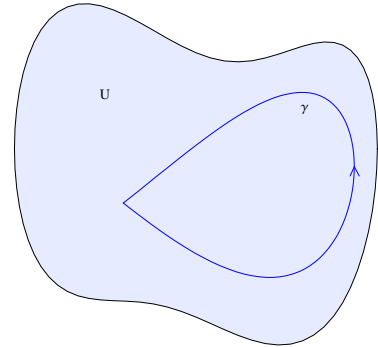
Definition 4.2. Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn U und $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ zusammenhängend sind.

Bemerkung 4.2.1. Eine Menge $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ nennen wir zusammenhängend, wenn es für jede $z, w \in G$ eine stetige Kurve auf der Sphäre $\{\omega \in \mathbb{R}^3; |\omega| = 1\}$ gibt, die $p(z)$ und $p(w)$ verbindet. Hier ist p die Projektion aus 2.9.

Bemerkung 4.2.2. Einfacher gesagt: U heißt einfach zusammenhängend wenn U zusammenhängend ist und keine Löcher hat. Diese Definition ist übrigens rein “complex-1-dimensional”. In höheren Dimensionen ist “einfach zusammenhängend” anders zu definieren.

Theorem 4.3 (Integralsatz von Cauchy). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede stückweise differenzierbare geschlossene Kurve γ , die innerhalb von U verläuft, dass

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$



Bemerkung 4.3.1. Für $\gamma_{w,R} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_{w,R}(t) = w + Re^{it}$ schreibt man manchmal

$$\oint_{|z-w|=R} f(z) dz = \int_{\gamma_{w,R}} f(z) dz.$$

Der Grund ist, dass man mit $|z - w| = R$ die Richtung nicht festgelegt hat. Wir werden diese Notation auch verwenden für den Rand eines Gebietes, das wir linksherum als Kurve in einem Integral durchlaufen wollen.

Beweis. Wir beweisen durch Widerspruch und nehmen darum an, dass wir eine Kurve γ haben, mit

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = c > 0.$$

Wir dürfen ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, dass γ einfach ist. Außerdem nehmen wir an, dass γ linksherum orientiert ist.

• Der erste Schritt im Beweis ist, statt γ , eine Kurve γ_{sl} zu betrachten, die stückweise linear ist. Anders gesagt, eine Kurve zu betrachten, die einen Polygonzug beschreibt. Das Integral über dem Polygonzug kann man vergleichen mit einer Riemannsumme für das ursprüngliche Integral. Darum kann man diesen Polygonzug genügend nah an γ nehmen damit

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_{sl}} f(z) dz \right| < \frac{1}{2}c.$$

Es gilt

$$\left| \int_{\gamma_{sl}} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{2}c > 0. \quad (4.1)$$

• Im zweiten Schritt konstruiert man endlich viele Dreiecke $\{D_i\}_{i=1}^k$, die das Innere von γ_{sl} überdecken und deren äußerer Rand genau das Bild von γ_{sl} bildet. Nennen wir ∂D_i die linksherum laufende Kurve, die den Rand von D_i als Bild hat, dann gilt

$$\int_{\gamma_{sl}} f(z) dz = \sum_{i=1}^k \oint_{\partial D_i} f(z) dz.$$

Kurven, die in beiden Richtungen durchlaufen werden, liefern keinen Beitrag. Wegen (4.1) gilt für mindestens eine der Kurven ∂D_{i_1}

$$\left| \oint_{\partial D_{i_1}} f(z) dz \right| \geq \frac{c}{2k}.$$

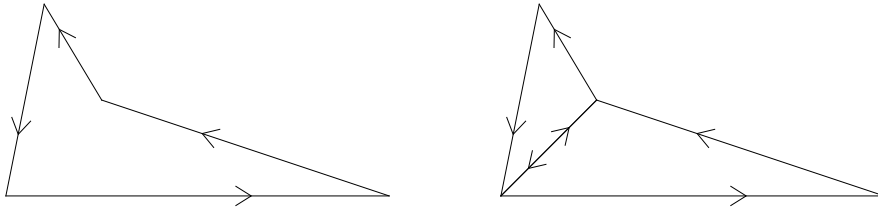


Abbildung 4.1: Zusätzliche Gerade ohne Einfluß auf den Wert des Integrals.

• Anschließend teilt man dieses Dreieck D_{i_1} in vier gleichgroße Dreiecke der zweiten Generation D_1^2, \dots, D_4^2 . Für mindestens eines dieser gilt

$$\left| \oint_{\partial D_{i_2}^2} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} \frac{c}{2k}.$$

Durch Fortsetzung dieses Algorithmus findet man eine Folge $\{D_{i_m}^m\}_{m=1}^{\infty}$ mit

$$\left| \oint_{\partial D_{i_m}^m} f(z) dz \right| \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \frac{c}{2k}. \quad (4.2)$$

Nennen wir $|\partial D|$ die Länge der Kurve und setzen wir $\ell = |\partial D_{i_1}|$, dann folgt

$$|\partial D_{i_m}^m| = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \ell.$$

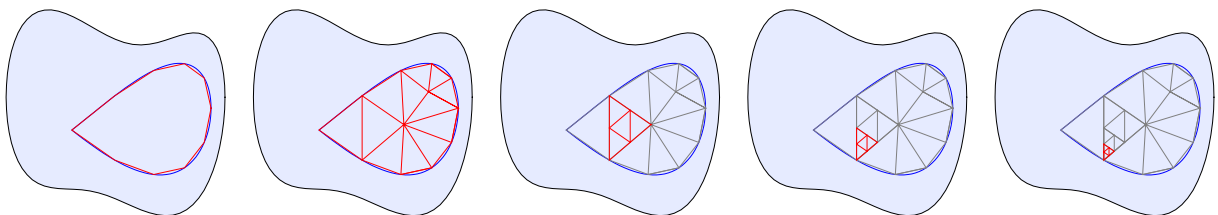


Abbildung 4.2: Einige Schritte zum Beweis des Integralsatzes: Polygonzug statt Kurve, Triangulieren, Verfeinern, Verfeinern, Verfeinern.

• Es gilt $D_{i_{m+1}}^{m+1} \subset D_{i_m}^m \subset \dots \subset D_{i_2}^2 \subset D_{i_1}$ und es gibt $z_1 \in \bigcap_{m \geq 2} D_{i_m}^m$. Sowohl die Projektion auf der reellen als auch auf der imaginären Achse liefert eine Intervallschachtelung und die Vollständigkeit von \mathbb{R} gibt die Existenz von $\operatorname{Re} z_1$ und $\operatorname{Im} z_1$.

• Weil f holomorph ist in z_1 , gibt es für jede $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass

$$0 < |z - z_1| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - f'(z_1) \right| \leq \varepsilon.$$

Für $g(z) = f(z_1) + (z - z_1) f'(z_1)$ kennen wir eine Stammfunktion, nämlich

$$G(z) = z f(z_1) + \frac{1}{2} (z - z_1)^2 f'(z_1),$$

und es folgt

$$\oint_{\partial D_{i_m}^m} (f(z_1) + (z - z_1) f'(z_1)) dz = 0.$$

Wenn $D_{i_m}^m \subset B_{\delta_\varepsilon}(z_1)$ erfüllt ist, gilt also

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \frac{c}{2k} &\leq \left| \oint_{\partial D_{i_m}^m} f(z) dz \right| = \left| \oint_{\partial D_{i_m}^m} (f(z) - f(z_1) - (z - z_1) f'(z_1)) dz \right| \leq \\ &\leq \oint_{\partial D_{i_m}^m} |(f(z) - f(z_1) - (z - z_1) f'(z_1))| |dz| \leq \\ &\leq \oint_{\partial D_{i_m}^m} \varepsilon |z - z_1| |dz| \leq \varepsilon \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \ell |\partial D_{i_m}^m| = \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \ell^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Hier verwendet man

$$|z - z_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \ell \quad \text{und} \\ \oint_{\partial D_{i_m}^m} 1 |dz| = |\partial D_{i_m}^m| = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \ell.$$

• Kombiniert man (4.2) und (4.3), so folgt ein Widerspruch für ε genügend klein. Um genau zu sein: man nehme $\varepsilon \in (0, \frac{c}{2k\ell^2})$, finde passendes δ_ε und nehme m derart, dass $(\frac{1}{2})^{m-1} \ell < \delta_\varepsilon$. \square

Kombinieren wir die Ergebnisse von Proposition 4.1 und Theorem 4.3, dann folgt:

Korollar 4.4. *Holomorphe Funktionen auf einfach zusammenhängende Gebiete in \mathbb{C} haben eine Stammfunktion.*

4.3 Residuum

Eine Funktion wie $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^{-n}$ hat eine Stammfunktion für $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$, nämlich $F(z) = \frac{-1}{n-1} z^{-n+1}$. Für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Für $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^{-1}$ kann man nur auf einem Teil von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion finden. Sucht man auf einer kleinen Umgebung von 1 eine Stammfunktion durch $\int_{[1, z]} f(w) dw + c$, dann findet man

$$F(z) = \text{Log}(z) + c = \ln |z| + i \text{Arg}(z) + c$$

und versucht man diese Funktion zu erweitern, bekommt man spätestens ein Problem, wenn sich Kurven links und rechts um 0 herum treffen: Die Erweiterung vom Argument gibt links herum einen Unterschied von 2π . Das heißt, jede Stammfunktion von $z \mapsto z^{-1}$ ist nicht nur in 0 nicht definiert, sondern hat notwendigerweise einen Schnitt in ihrem Definitionsgebiet von 0 zu ∞ . Egal wo man diesen Schnitt mit seiner Unstetigkeit plazierte, der Sprung wird immer $2\pi i$ sein.

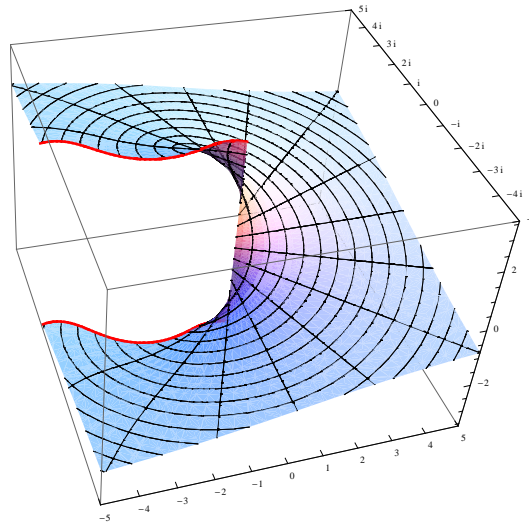


Abbildung 4.3: Ein Schnitt im Imaginärteil einer Stammfunktion für $z \mapsto z^{-1}$.

Lemma 4.5. Für jede stückweise differenzierbare Jordan-Kurve, die links um 0 herum läuft, gilt

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Beweis. Für $\gamma_0 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_0(t) = e^{it}$ gilt

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Für eine beliebige stückweise stetige Jordan-Kurve γ , die links um 0 herum läuft, werden wir eine Skizze eines Beweises geben. Man konstruiert eine Kurve wie im Bild. Nennen wir die ‘große’ Kurve Γ_ε und nehmen wir an, diese ist zusammengesetzt aus 4 kleineren stückweise stetig differenzierbaren Kurven:

$$\Gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon + \ell_-^\varepsilon + \ell_+^\varepsilon - \gamma_{0,\varepsilon}.$$

1. γ_ε , die bis auf einem Spalt gleich γ ist;
2. $\gamma_{0,\varepsilon}$, die bis auf einem Spalt gleich γ_0 ist;
3. ℓ_+^ε , die den Endpunkt von γ_ε mit dem Anfangspunkt von $-\gamma_{0,\varepsilon}$ verbindet;
4. ℓ_-^ε , die den Anfangspunkt von γ_ε mit dem Endpunkt von $-\gamma_{0,\varepsilon}$ verbindet.

Wir haben

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_\varepsilon + \ell_-^\varepsilon - \gamma_{0,\varepsilon} + \ell_+^\varepsilon} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} dz + \int_{\ell_-^\varepsilon} \frac{1}{z} dz - \int_{\gamma_{0,\varepsilon}} \frac{1}{z} dz + \int_{\ell_+^\varepsilon} \frac{1}{z} dz.$$

Weil wir Γ_ε in ein einfach zusammenhängendes Gebiet $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ legen können, gilt

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} dz = 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt weiter:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz,$$

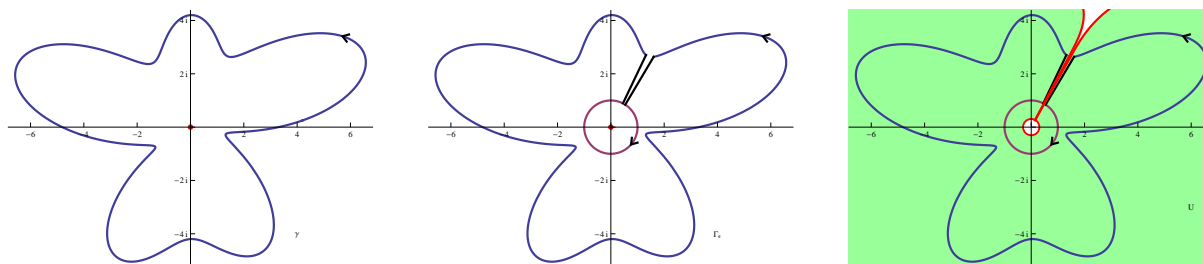


Abbildung 4.4: Links die Kurve um eine Singularität. In der Mitte deart geändert, dass die Singularität außerhalb liegt. Rechts sieht man wie die neue Kurve innerhalb einer einfach zusammenhängende Menge (in grün) liegt.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\ell_{\varepsilon}^-} \frac{1}{z} dz = - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\ell_{\varepsilon}^+} \frac{1}{z} dz$$

und

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_{0,\varepsilon}} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{1}{z} dz = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{1}{z} dz + \int_{\ell_{\varepsilon}^-} \frac{1}{z} dz - \int_{\gamma_{0,\varepsilon}} \frac{1}{z} dz + \int_{\ell_{\varepsilon}^+} \frac{1}{z} dz \right) = \\ &= \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz - \int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz \end{aligned}$$

und dann auch

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

□

Theorem 4.6. Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, seien $w_1, \dots, w_m \in U$ unterschiedlich und $f : U \setminus \{w_1, \dots, w_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei γ eine stückweise stetig differenzierbare Jordan-Kurve mit Bild innerhalb von U , die links herum läuft. Dann gilt für $\varepsilon > 0$ und genügend klein:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{w_i \in \text{Innengebiet } \gamma} \int_{t \rightarrow w_i + \varepsilon e^{it}}^{t \in [0, 2\pi]} f(z) dz.$$

Beweis. Ähnlich wie im ‘Beweis’ des letzten Theorems, baut man sich eine Kurve Γ_{ε} , die die Stellen w_i zum Aussengebiet verurteilt. □

Definition 4.7. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $w \in U$. Für $f : U \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph definiert man das **Residuum** an der Stelle w durch

$$\text{Res}_w(f) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_{w,\varepsilon}} f(z) dz$$

für $\gamma_{w,\varepsilon} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_{w,\varepsilon}(t) = w + \varepsilon e^{it}$.

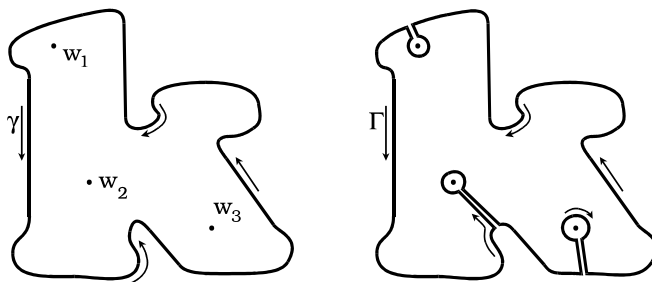


Abbildung 4.5: Die ‘Kanalisation’ einer Kurve, wenn es Singularitäten im Inneren gibt.

Bemerkung 4.7.1. Nehmen wir an, dass $\overline{B_r(w)} \subset U$ für $r > 0$. Dann kann man aus dem letzten Theorem schließen, dass für alle $\varepsilon \in (0, r)$

$$\int_{\gamma_{w,r}} f(z)dz = \int_{\gamma_{w,\varepsilon}} f(z)dz.$$

Um das Residuum zu bestimmen reicht es, dass $\overline{B_r(w)} \subset U$. Es gilt:

$$\text{Res}_w(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-w|=r} f(z)dz \text{ für } r > 0 \text{ genügend klein.} \tag{4.4}$$

Das obrige Theorem läßt sich jetzt wie folgt formulieren:

Theorem 4.8 (Residuensatz für linksdrehende Jordan-Kurven). Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, seien $w_1, \dots, w_m \in U$ unterschiedlich und $f : U \setminus \{w_1, \dots, w_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei γ eine stückweise stetig differenzierbare Jordan-Kurve innerhalb von U , die links herum läuft. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{w_i \in \text{Innengebiet } \gamma} \text{Res}_{w_i}(f).$$

Bemerkung 4.8.1. Für eine beliebige geschlossene Kurve γ , die nicht durch $w \in \mathbb{C}$ läuft, kann man die Umlaufzahl $n(\gamma, w)$ definieren. Der **allgemeine Residuensatz** gibt dann die Aussage

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^m n(\gamma, w_i) \text{Res}_{w_i}(f).$$

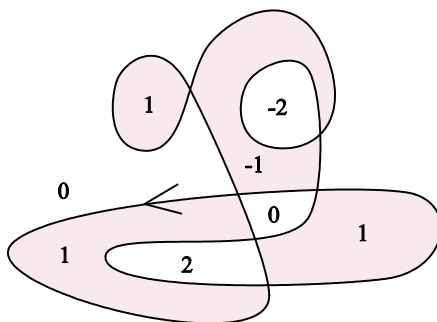


Abbildung 4.6: Die Umlaufzahlen $z \mapsto n(\gamma, z)$ einer Kurve.

Beispiel 4.9. Nehmen wir die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = 2e^{it}$. Gefragt ist der Wert von

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz.$$

Man bemerke, dass $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ zwei singuläre Stellen besitzt: $z = i$ und $z = -i$. Beide Stellen liegen innerhalb der Kurve γ . Statt eine Kanalisation zu basteln und die zugehörigen Residuen direkt zu berechnen, zerlegen wir die Funktion:

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{-\frac{1}{2}i}{z - i} + \frac{\frac{1}{2}i}{z + i}.$$

Es folgt:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_{\gamma} \left(\frac{-\frac{1}{2}i}{z - i} + \frac{\frac{1}{2}i}{z + i} \right) dz = -\frac{1}{2}i \int_{\gamma} \frac{1}{z - i} dz + \frac{1}{2}i \int_{\gamma} \frac{1}{z + i} dz.$$

Dann lässt sich Lemma 4.5 verwenden, wenn man bedenkt, dass die Residuen hier verschoben sind von 0 auf i und von 0 auf $-i$. Definiere $\gamma_i(t) = \gamma(t) + i$ und $\gamma_{-i}(t) = \gamma(t) - i$. Weil γ sowohl i als auch $-i$ im Innengebiet hat, bedeutet das

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - i} dz = \int_{\gamma_i} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} \frac{1}{z + i} dz = \int_{\gamma_{-i}} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Wir finden

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \left(-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i \right) 2\pi i = 0.$$

Beispiel 4.10. Nehmen wir die Kurve $\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_2(t) = i + e^{it}$ und wird

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2 + 1} dz$$

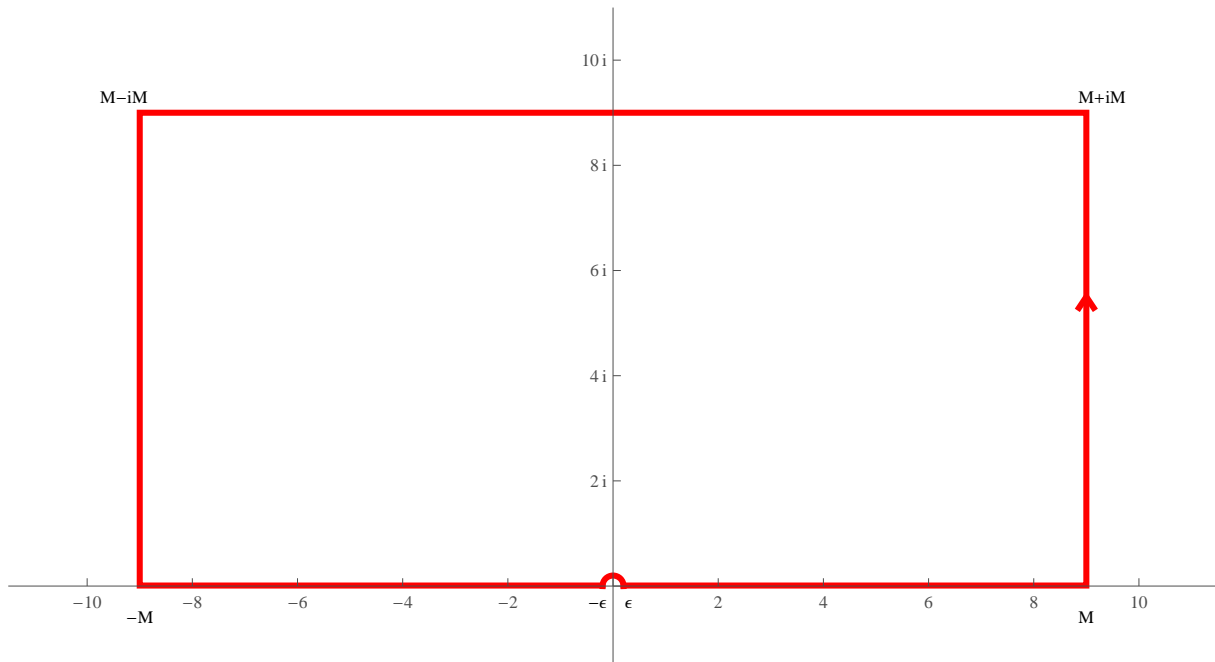
gefragt, folgt ähnlich (aber jetzt liegt nur i im Innengebiet), dass

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_{\gamma_2} \left(\frac{-\frac{1}{2}i}{z - i} + \frac{\frac{1}{2}i}{z + i} \right) dz = -\frac{1}{2}i (2\pi i) + 0 = \pi.$$

Beispiel 4.11. Wir möchten $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ berechnen. Eine Stammfunktion mit Hilfe elementaren Standardfunktionen steht nicht zu Verfügung. Man kann sich jedoch überzeugen, dass dieses Integral als uneigentliches Riemann-Integral existiert. Wir werden zeigen, dass uns der Residuensatz hilft den Wert des Integrals zu bestimmen. Betrachte

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

für eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\Gamma_{\varepsilon, M}$, die das folgende Bild hat.



Wir schreiben $\Gamma_{\varepsilon, M} = \gamma_I + \gamma_{II} + \gamma_{III} + \gamma_{IV} + \gamma_V + \gamma_{VI}$:

- I. $\gamma_I: [\varepsilon, M] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_I(t) = t$,
- II. $\gamma_{II}: [0, M] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_{II}(t) = M + it$,
- III. $\gamma_{III}: [-M, M] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_{III}(t) = -t + iM$,
- IV. $\gamma_{IV}: [0, M] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_{IV}(t) = -M + i(M - t)$,
- V. $\gamma_V: [-M, -\varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_V(t) = t$,
- VI. $\gamma_{VI}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_{VI}(t) = \varepsilon e^{i(\pi-t)}$.

Weil $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus B_{\varepsilon/2}(0)$ ist und keine singulären Stellen innerhalb γ hat, gilt

$$0 = \int_{\Gamma_{\varepsilon, M}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \sum_{k=I}^{VI} \int_{\gamma_k} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Wir betrachten die einzelnen Integrale:

- I. $\int_{\gamma_I} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{ix}}{x} dx$,
- II. $\left| \int_{\gamma_{II}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^M \frac{e^{i(M+it)}}{M+it} i dt \right| = \left| \int_0^M \frac{e^{iM-t}}{M+it} i dt \right| \leq \frac{1}{M} \int_0^M e^{-t} dt \leq \frac{1}{M}$,
- III. $\left| \int_{\gamma_{III}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| - \int_{-M}^M \frac{e^{i(-t+iM)}}{-t+iM} dt \right| \leq \int_{-M}^M \left| \frac{e^{i(-t+iM)}}{-t+iM} \right| dt \leq \int_{-M}^M \frac{e^{-M}}{M} dt = 2e^{-M}$,
- IV. $\left| \int_{\gamma_{IV}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \dots (\text{ähnlich wie bei II}) \dots \leq \frac{1}{M}$,
- V. $\int_{\gamma_V} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{-ix}}{x} dx$.

Für das letzte Integral finden wir

$$VI. \int_{\gamma_{VI}} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i \int_0^{\pi} \frac{e^{\varepsilon e^{i(\pi-t)}}}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}} \varepsilon e^{i(\pi-t)} dt = -i \int_0^{\pi} e^{\varepsilon e^{i(\pi-t)}} dt = -i \int_0^{\pi} e^{\varepsilon(-\cos t + i \sin t)} dt$$

und für $\varepsilon \downarrow 0$ folgt mit gleichmäßiger Stetigkeit

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_{VI}} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{\pi} e^{\varepsilon(-\cos t + i \sin t)} dt = -i \int_0^{\pi} e^0 dt = -\pi i.$$

Kombinieren wir diese Ergebnisse, so finden wir drei Teilintegrale, die für $M \rightarrow \infty$ nach 0 konvergieren, und folgendes bleibt übrig:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \int_{\Gamma_{\varepsilon, M}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \left(\int_{\varepsilon}^M \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{\gamma_{VI}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \downarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^M \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_{VI}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i. \end{aligned}$$

Anders gesagt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

Singuläre Stellen

5.1 Beispiele zur Funktion und Stammfunktion

Inzwischen haben wir bemerkt, dass es einen starken Zusammenhang gibt zwischen komplexer Differenzierbarkeit einer Funktion und der Existenz einer Stammfunktion. Bevor wir mehr zu den Folgen des Integralsatzes von Cauchy sagen, betrachten wir erst mal einige Beispiele.

Beispiel 5.1. Das wichtigste Beispiel haben wir schon mehrmals betrachtet. Die Funktion $z \mapsto z^{-1}$ ist definiert auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und ist da auch holomorph. Eine Stammfunktion ist aber nur zu finden auf einem einfach zusammenhängenden Teilgebiet von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, wie zum Beispiel $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Eine solche Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist der Logarithmus, definiert durch

$$\text{Log}(z) = \ln |z| + i \text{Arg}(z).$$

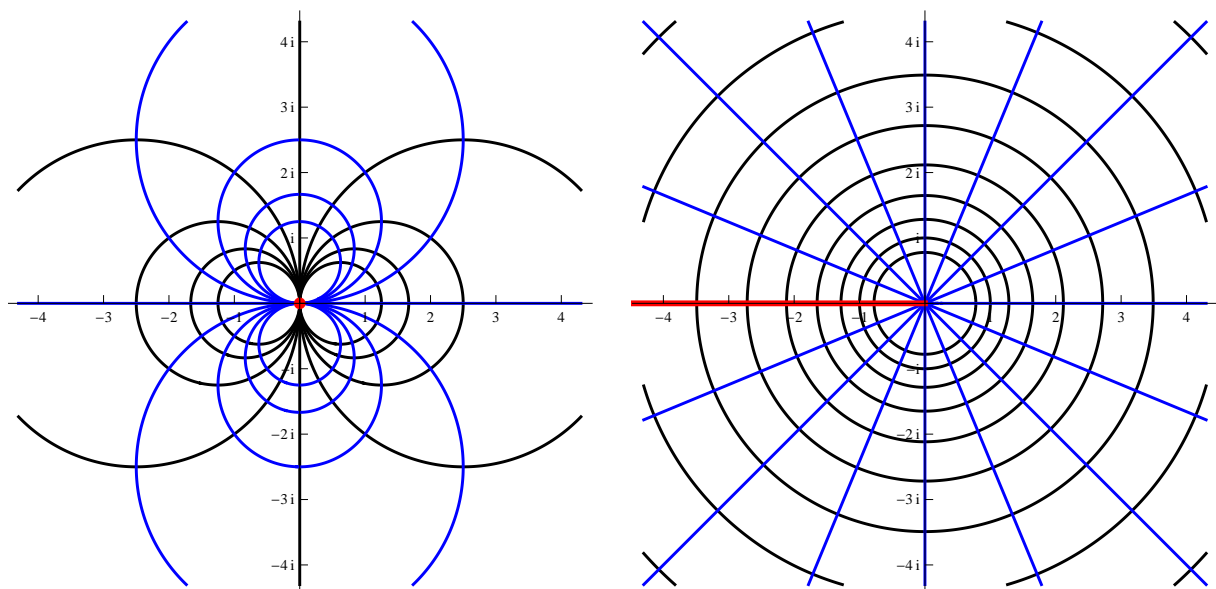


Abbildung 5.1: Skizzen zu den Niveaumengen der Real- und Imaginärteile der Funktionen $z \mapsto z^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$.

Hat man eine differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, so folgt $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \text{Log}(\gamma(b)) - \text{Log}(\gamma(a))$. Wenn eine Kurve die negative reelle Achse schneidet gilt dies nicht mehr unbedingt.

Wie man die Niveaumengen in Abbildung 5.1 findet, wird hier erklärt:

Die Niveaulinien von $\text{Re}(z^{-1})$ findet man durch $z = x + iy$ und

$$c = \text{Re}\left(\frac{1}{x + iy}\right) = \text{Re}\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Es folgt $x^2 + y^2 = x/c$ und das läßt sich auch schreiben als

$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2.$$

Diese Gleichung liefert einen Kreis mit Radius $\frac{1}{2|c|}$ um den Mittelpunkt $(\frac{1}{2c}, 0)$. Ähnlich findet man aus $c = \text{Im}\left(\frac{1}{x + iy}\right)$ einen Kreis mit Radius $\frac{1}{2|c|}$ um den Mittelpunkt $(0, \frac{-1}{2c})$.

Die Niveaulinien von $\text{Re}(\text{Log}(z)) = \ln|z|$ sind Kreise um 0 und die Niveaulinien von $\text{Im}(\text{Log}(z)) = \text{Arg}(z)$ sind Halbgeraden, die in 0 anfangen.

Beispiel 5.2. Ein zweites Beispiel ist die Funktion $z \mapsto z^{-2}$. Auch diese Funktion ist definiert auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und ist da auch holomorph. Diesmal finden wir sogar eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, nämlich

$$F(z) = -z^{-1}.$$

Obwohl $z \mapsto z^{-2}$ in 0 eine Singularität hat, gilt für jede differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = \frac{-1}{\gamma(b)} - \frac{-1}{\gamma(a)}$. Für jede geschlossene (differenzierbare) Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, auch wenn er um 0 herumläuft, gilt $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0$.

Die Niveaulinien von $\text{Re}(z^{-2})$ und $\text{Im}(z^{-2})$ sind weniger schön zu berechnen und wir lassen es bei einigen Bildern.

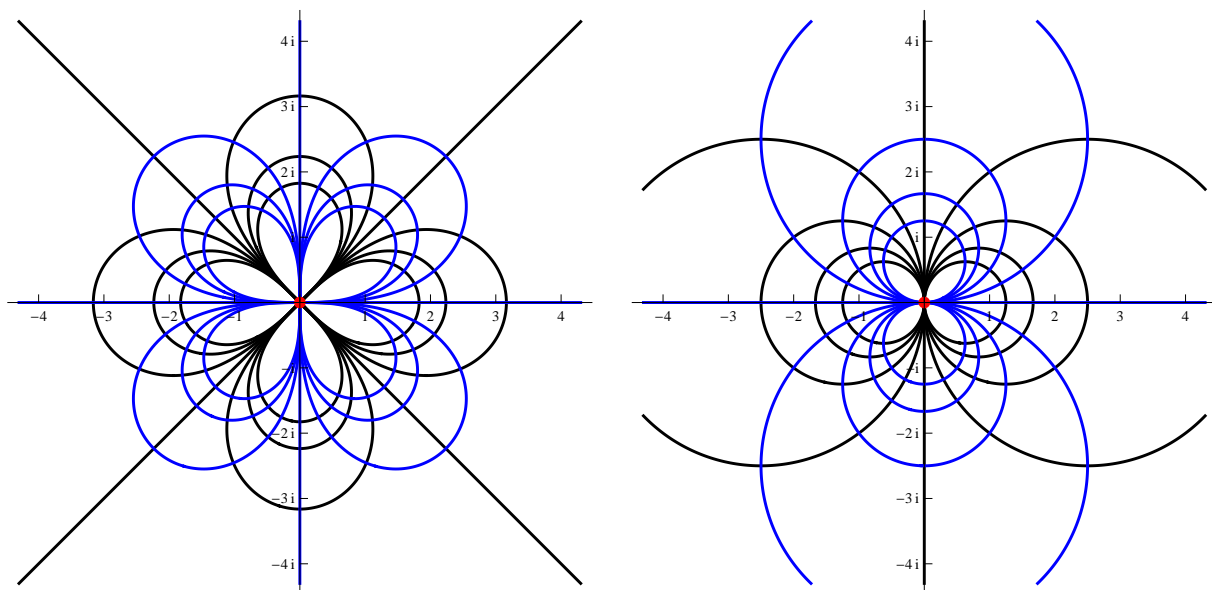


Abbildung 5.2: Skizzen zu $z \mapsto z^{-2}$ und $z \mapsto -z^{-1}$ mit Niveaumengen des Real- und Imaginärteils.

Beispiel 5.3. Wenn wir versuchen die Wurzel aus $z \in \mathbb{C}$ als Funktion zu definieren, also für jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ einen eindeutigen Wert $\sqrt{z} \in \mathbb{C}$, dann kann man das nur, wenn man einen Schnitt anbringt. Zum Beispiel

$$\sqrt{z} := e^{\frac{1}{2}\text{Log}(z)} = \sqrt{|z|}e^{\frac{1}{2}i\text{Arg}(z)}$$

erfüllt $(f(z))^2 = z$, aber erbt den Schnitt des Logarithmus und ist nicht stetig über $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Auf diesem Gebiet hat man eine Stammfunktion

$$F(z) = \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2} \text{Log}(z)}.$$

Berechnen wir

$$\oint_{|z|=r} e^{\frac{1}{2} \text{Log}(z)} dz. \quad (5.1)$$

Weil man bei einer geschlossenen Kurve an einer beliebigen Stelle auf der Kurve anfangen darf, nehmen wir $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\gamma(t) = re^{it}$ mit $r > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=r} e^{\frac{1}{2} \text{Log}(z)} dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{|re^{it}|} e^{\frac{1}{2} i \text{Arg}(re^{it})} r i e^{it} dt \\ &= r^{\frac{3}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{1}{2} it} i e^{it} dt = i r^{\frac{3}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{3}{2} it} dt = i r^{\frac{3}{2}} \left[\frac{2}{3i} e^{\frac{3}{2} it} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{3}{2} i\pi} - e^{-\frac{3}{2} i\pi} \right) = -\frac{4}{3} \pi i r^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

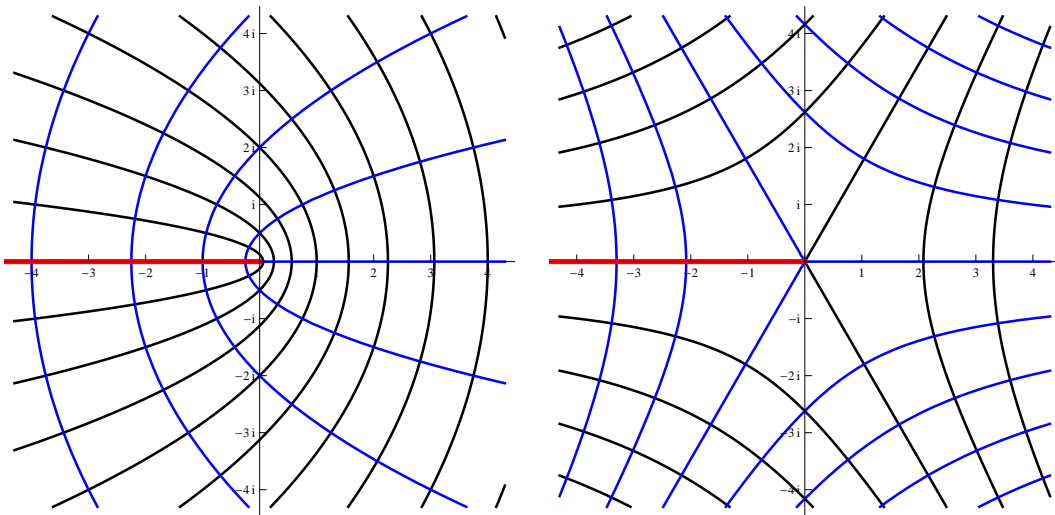


Abbildung 5.3: Skizzen zur Erweiterung von $x \mapsto \sqrt{x} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Stammfunktion: Links das Definitionsgebiet von $z \mapsto \exp(\frac{1}{2} \text{Log} z)$ mit Niveaumengen des Real- und Imaginärteils. Rechts ähnliches zu $z \mapsto \frac{2}{3} \exp(\frac{3}{2} \text{Log} z)$.

Die Ableitungsregeln liefern, jedenfalls für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$:

$$F'(z) = \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2} \text{Log}(z)} \frac{3}{2} \text{Log}'(z) = e^{\frac{3}{2} \text{Log}(z)} \frac{1}{z} = e^{\frac{3}{2} \text{Log}(z)} \frac{1}{e^{\text{Log}(z)}} = e^{\frac{1}{2} \text{Log}(z)}.$$

Auch mit dieser Stammfunktion, kann man (5.1) berechnen. Man nehme

$$\gamma_\varepsilon : [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \gamma_\varepsilon(t) = re^{it}$$

und finde

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=r} e^{\frac{1}{2} \text{Log}(z)} dz &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} e^{\frac{1}{2} \text{Log}(z)} dz = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\frac{2}{3} e^{\frac{3}{2} \text{Log}(z)} \right]_{z=-r-i\varepsilon}^{z=-r+i\varepsilon} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(e^{\frac{3}{2} \text{Log}(-r+i\varepsilon)} - e^{\frac{3}{2} \text{Log}(-r-i\varepsilon)} \right) = \frac{2}{3} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} i(\pi-\varepsilon)} - r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} i(-\pi+\varepsilon)} \right) = -\frac{4}{3} \pi i r^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Wir haben hier verwendet, dass $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \times (-i\pi, i\pi)$ eine bijektive Abbildung ist mit $z \mapsto e^z$ als Inverse. Die Exponentialfunktion $z \mapsto e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ hat keine Inverse! Die Einschränkung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R} \times (-i\pi, i\pi)$ schon.

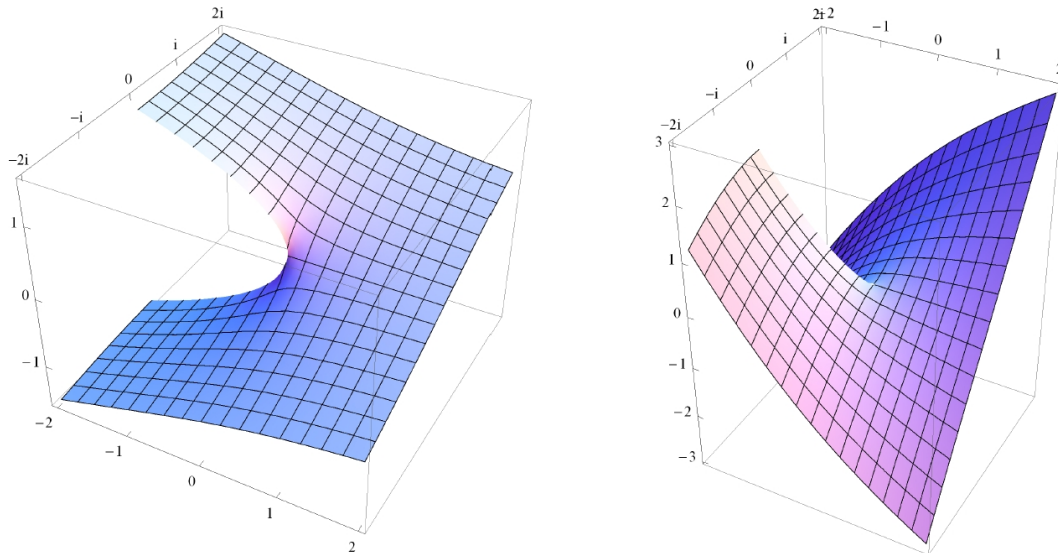


Abbildung 5.4: Links eine Skizze der Funktion $z \mapsto \operatorname{Im}(\sqrt{z})$ und rechts $z \mapsto \operatorname{Im}\left(\frac{2}{3}z\sqrt{z}\right)$. Man sieht die Unstetigkeit auf \mathbb{R}^- .

Beispiel 5.4. Wir betrachten $z \mapsto e^{1/z} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Diese Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann können wir auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ eine Stammfunktion definieren durch

$$F(z) = \int_{[1,z]} e^{1/w} dw,$$

wobei $[1, z]$ die Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ist mit $\gamma(t) = 1 + t(z - 1)$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist dieses Integral wohldefiniert. Wenn man versucht mit Maple oder Mathematica eine mehr explizite Stammfunktion zu finden, erscheint die folgende Stammfunktion:

$$\tilde{F}(z) = ze^{1/z} - \operatorname{Ei}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dieser Funktion hilft uns so nicht weiter.

Das Integral

$$\oint_{|z|=r} e^{1/z} dz$$

kann man wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=r} e^{1/z} dz &= \int_0^{2\pi} e^{(re^{it})^{-1}} ire^{it} dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{e^{r^{-1}e^{-it}}}{(r^{-1}e^{-it})^2} (-ir^{-1}e^{-it}) dt = - \oint_{|z|=r^{-1}} \frac{e^z}{z^2} dz \\ &= \oint_{|z|=r^{-1}} \frac{e^z}{z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0\left(\frac{e^z}{z^2}\right) = 2\pi i. \end{aligned}$$

Für die Berechnung des Residuums benutzt man

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1 + z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(m+2)!},$$

und bemerkt, dass

$$\oint_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{z^2} dz = 0 \quad \text{und} \quad \oint_{|z|=\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(m+2)!} dz = 0.$$

Abbildung 5.5: Skizzen zu den Landschaften von $z \mapsto e^{1/z} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ (links) und die Stammfunktion $z \mapsto e^{1/z}/z - \text{Ei}(1/z) : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$.

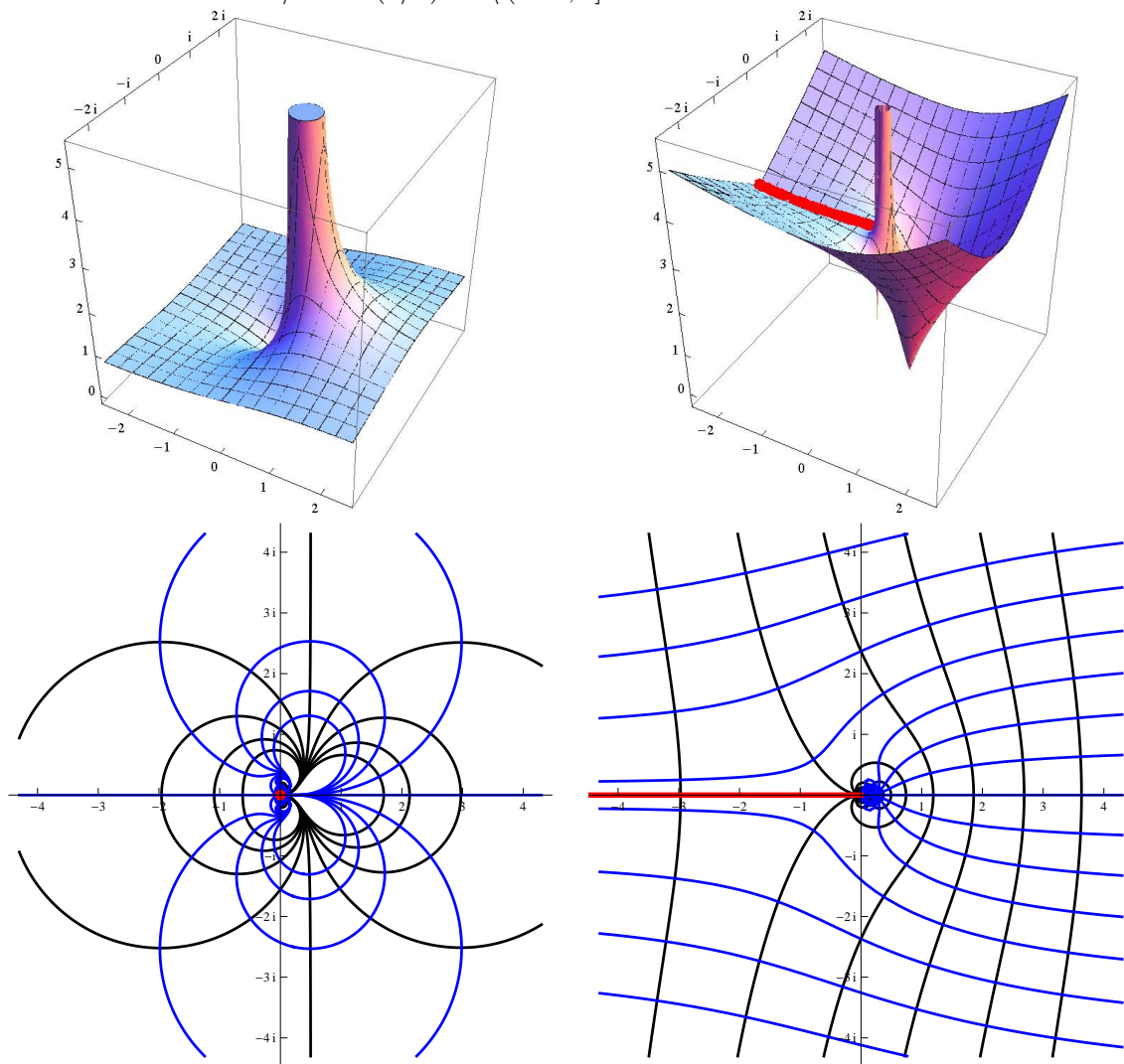


Abbildung 5.6: Links eine Skizze zu $z \mapsto \exp(1/z)$ mit den Niveaumengen des Real- und Imaginärteils(links). Rechts ähnliches für eine zugehörige Stammfunktion.

Die Funktion Ei^1 ist definiert auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ als eine Stammfunktion von $z \mapsto e^z/z$.

In diesen vier Beispielen haben wir uns das Verhalten angeschaut von Funktionen, die eine Singulartät bei 0 haben. Die ersten Beispiele betrachteten $z \mapsto z^\alpha$.

- Für $\alpha \in \mathbb{N}$ ist z^α auf \mathbb{C} definiert und es gibt eine Stammfunktion $\frac{1}{\alpha+1}z^{\alpha+1}$.
- Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (und für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) kann man eine solche Funktion z^α nur vernünftig definieren, wenn man einen Schnitt zu 0 zuläßt. Eine Stammfunktion hat den gleichen Schnitt.
- Für $\alpha \in \{\dots, -3, -2\}$ ist z^α definiert auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und ist da holomorph. Sie hat eine Stammfunktion $\frac{1}{\alpha+1}z^{\alpha+1}$, die auch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert ist und da holomorph ist.
- Für $\alpha = -1$ ist z^{-1} zwar definiert auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, hat aber nur eine Stammfunktion auf eine zusammenhängende Teilmenge.

¹Das Ei kommt nicht vom Huhn sondern von „Exponentiellem Integral“.

- Die Funktion $z \mapsto e^{1/z}$ hat bei 0 eine Singularität mit stärkerem Wachstum als jede Potenz.

Die letzten 3 Möglichkeiten betreffen Funktionen, die holomorph sind auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und in 0 eine Singularität haben.

Wenn man differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet, dann kann man eigentlich nichts darüber aussagen, wie diese Funktion sich bei 0 verhalten sollte: x^{-n} für $n \in \mathbb{N}$, $|x|^{-\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $x|x|^{-\alpha-1}$ für $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\ln|x|$, $e^{1/x}$ haben alle ein unterschiedliches singuläres Verhalten. Wenn wir holomorphe Funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten, scheint es weniger Spielraum zu geben. Es führt uns zu der Frage:

Welcher Typ von Singularität kann eine Funktion, die holomorph ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, in 0 haben?

5.2 Die Integralformel von Cauchy

Theorem 5.5 (Integralformel von Cauchy). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ für $r > 0$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(z_0)$, dass*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Bemerkung 5.5.1. Mit Hilfe des Residuensatzes findet man für jede stückweise stetig differenzierbare Jordan-Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, die links um z herum läuft, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Das Erstaunliche an diesem Ergebnis ist, dass wenn man die holomorphe Funktion f kennt auf so einer geschlossenen Kurve, alle Werte von f innerhalb der Kurve dann auch feststehen.

Beweis. Wenn $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und $z \in U$, dann ist

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{für } w \neq z, \\ f'(z) & \text{für } w = z, \end{cases}$$

stetig. Es folgt sofort, dass g holomorph ist auf $U \setminus \{z\}$. Außerdem ist g beschränkt auf $\overline{B_r(z_0)}$, sagen wir durch M_g . Mit dem Residuensatz (Theorem 4.8) folgt für $\varepsilon \in (0, r_0)$ mit $r_0 = |z - z_0| \leq r$ dass

$$\oint_{|w-z_0|=r} g(w) dw = 2\pi i \operatorname{Res}_z(g) = \oint_{|w-z|=\varepsilon} g(w) dw.$$

Weil für jedes solches $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$\left| \oint_{|w-z|=\varepsilon} g(w) dw \right| \leq \left| \int_0^{2\pi} g(z_0 + \varepsilon e^{it}) i\varepsilon e^{it} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |g(z_0 + \varepsilon e^{it}) i\varepsilon e^{it}| dt \leq 2\pi\varepsilon M_g,$$

folgt

$$\oint_{|w-z_0|=r} g(w) dw = 0.$$

Weiter bekommt man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \left(\frac{f(w) - f(z)}{w-z} + \frac{f(z)}{w-z} \right) dw = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} g(w) dw + \frac{f(z)}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{1}{w-z} dw = \frac{f(z)}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{1}{w-z} dw. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Auch hier führt der Residuensatz zum Ergebnis, denn es gilt

$$\oint_{|w-z_0|=r} \frac{1}{w-z} dw = \oint_{|w-z_0|=r} \frac{1}{w-z} dw = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt = 2\pi i. \quad (5.3)$$

Die Kombination von (5.2) und (5.3) macht den Beweis komplett. \square

5.3 Holomorphe Funktionen haben holomorphe Ableitungen

Wir erinnern uns, dass gleichmäßige Konvergenz das Vertauschen von Grenzprozessen erlaubt.

Lemma 5.6. Sei $f : [a, b] \times [0, \nu_0] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $x \mapsto f(x, \nu)$ integrierbar ist für jedes $\nu \in [0, \nu_0]$. Wenn

$$\lim_{\nu \downarrow 0} f(x, \nu) = f(x, 0) \text{ gleichmäßig für } x \in [a, b],$$

dann gilt

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \int_a^b f(x, \nu) dx = \int_a^b f(x, 0) dx.$$

Bemerkung 5.6.1. Gleichmäßige Konvergenz bedeutet, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \nu \in (0, \delta_\varepsilon) \implies \sup_{x \in [a, b]} |f(x, \nu) - f(x, 0)| < \varepsilon.$$

Eine sofortige Konsequenz der Integralformel von Cauchy ist:

Korollar 5.7. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und sei $\overline{B_r(z_0)} \subset U$ für $r > 0$. Dann existieren alle Ableitungen von f innerhalb $B_r(z_0)$ und es gilt für jedes $z \in B_r(z_0)$ und $n \in \mathbb{N}$, dass

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw. \quad (5.4)$$

Beweis. Für $z \in B_r(z_0)$ gilt $\inf \{|w-z|; w \in \partial B_r(z_0)\} =: c > 0$. Es folgt, weil

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{f(w)}{w-z} = \lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{\frac{f(w)}{w-z_1} - \frac{f(w)}{w-z}}{z_1 - z} = \frac{f(w)}{(w-z)^2} \text{ gleichmäßig für } w \in \partial B_r(z_0),$$

dass

$$\begin{aligned} \lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{z_1 \rightarrow z} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{\frac{f(w)}{w-z_1} - \frac{f(w)}{w-z}}{z_1 - z} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{\frac{f(w)}{w-z_1} - \frac{f(w)}{w-z}}{z_1 - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Das heißt, $f'(z)$ existiert und ist gleich (5.5).

Die Formel in (5.4) ist so bewiesen für $n \in \{0, 1\}$. Nehmen wir an, diese Formel gilt für n , dann folgt auf ähnliche Weise, dass

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \right) = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \right) dw = \frac{(n+1)n!}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw. \end{aligned}$$

□

5.4 Holomorph mit Ausnahme einer Singularität

Jetzt können wir zum Teil die Frage am Ende von 5.1 beantworten, nämlich welcher Typ von Singularität es nicht gibt.

Lemma 5.8. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Nehmen wir an, dass $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist auf $U \setminus \{z_0\}$ und stetig in z_0 . Dann ist f holomorph auf U .*

Beweis. Weil f dann auch beschränkt ist, gilt für $\varepsilon \downarrow 0$:

$$|\operatorname{Res}_{z_0}(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|w-z_0|=\varepsilon} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|w-z_0|=\varepsilon} |f(z)| |dz| \leq \frac{1}{2\pi} M (2\pi\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Für jede geschlossene Kurve innerhalb $B_r(z_0) \subset U$ gilt dann $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Aus Proposition 4.1 folgt, dass f eine Stammfunktion F hat auf $B_r(z_0)$ und dass F holomorph ist auf $B_r(z_0)$. Aus Korollar 5.7 folgt, dass auch $f = F'$ holomorph ist. □

Man kann dieses letzte Resultat sogar noch etwas verallgemeinern.

Theorem 5.9 (Hebbarkeitssatz von Riemann). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Nehmen wir an, dass $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und dass f beschränkt ist in einer Umgebung von z_0 . Dann existiert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ und die Funktion \tilde{f} , definiert durch*

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \neq z_0, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) & \text{für } z = z_0, \end{cases} \quad (5.6)$$

ist holomorph auf U .

Beweis. Man definiere

$$F(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Dann erfüllt F die Bedingungen von Lemma 5.8, das heißt, F ist holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$ und stetig in z_0 , und es folgt, dass F holomorph ist auf U . Weil

$$f(z) = \frac{F(z)}{z - z_0} = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

gilt, existiert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ und die Erweiterung \tilde{f} in (5.6) ist wohldefiniert. Außerdem erfüllt \tilde{f} die Bedingungen von Lemma 5.8. □

Funktionen, die holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$ und beschränkt in einer Umgebung von z_0 sind, sind also holomorph auf U . Eine erste Möglichkeit einer Singularität bekommt man bei einer Funktion wie $f(z) = (z - z_0)^{-1}$. Diese Funktion ist unbeschränkt bei z_0 . Gibt es etwas dazwischen wie zum Beispiel eine Funktion mit $|f(z)| \simeq |z - z_0|^{-\frac{1}{2}}$? Das nächste Ergebnis zeigt genau, welche Möglichkeiten es gibt, wenn man das Wachstum der Singularität durch eine Potenz abschätzen kann.

Lemma 5.10. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Nehmen wir an, dass $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und f folgende Abschätzung erfüllt. Es gibt $M, r, \alpha \in \mathbb{R}^+$ derart, dass*

$$|f(z)| \leq M |z - z_0|^{-\alpha} \text{ für } z \in B_r(z_0). \tag{5.7}$$

Dann existieren $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$ mit $n = [\alpha] = \max\{n \in \mathbb{N}; n \leq \alpha\}$ und eine holomorphe Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ so, dass

$$f(z) = \beta_n (z - z_0)^{-n} + \beta_{n-1} (z - z_0)^{1-n} + \dots + \beta_1 (z - z_0)^{-1} + g(z) \text{ für } z \in U.$$

Beweis. Nehme an $z_0 = 0$. Zeigen Sie, dass $F_0 : U \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$F_0(z) = \begin{cases} z^{n+1} f(z) & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0, \end{cases}$$

holomorph ist. Dann definiere man iterativ

$$F_{k+1}(z) = \begin{cases} \frac{F_k(z) - F_k(0)}{z} & \text{für } z \neq 0, \\ F'_k(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

und beweise, dass auch F_{k+1} holomorph ist, wenn F_k holomorph ist. Man findet

$$\begin{aligned} f(z) &= z^{-(n+1)} F_0(z) = \\ &= z^{-(n+1)} (F_0(0) + zF_1(z)) = \\ &= z^{-(n+1)} (F_0(0) + zF_1(0) + z^2F_2(z)) = \\ &= \dots\dots\dots = \\ &= z^{-(n+1)} (F_0(0) + zF_1(0) + \dots + z^n F_n(0) + z^{n+1} F_{n+1}(z)) = \\ &= z^{-n} F_1(0) + z^{-n+1} F_2(0) + \dots + z^{-1} F_n(0) + F_{n+1}(z). \end{aligned}$$

Man könnte auch via der Taylorreihe durchkommen. □

Beispiel 5.11. *Berechne $\int_{\gamma} \frac{z^2}{1-\cos z} dz$ für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = 3e^{it}$.*

Die Funktion $z \mapsto \frac{z^2}{1-\cos z}$ ist holomorph als Zusammensetzung holomorpher Funktionen, jedenfalls wenn $1 - \cos z \neq 0$. Die Problemstellen sind also genau die Stellen, an denen $1 - \cos z = 0$ gilt. Man löse $1 - \cos z = 0$:

$$\begin{aligned} \cos z = 1 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 \Leftrightarrow e^{2iz} + 1 = 2e^{iz} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} - 2e^{iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{iz} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = 1. \end{aligned}$$

Setzen wir $z = x + iy$, folgt

$$e^{i(x+iy)} = 1 \Leftrightarrow e^{-y} (\cos x + i \sin x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} \cos x = 1, \\ e^{-y} \sin x = 0. \end{cases}$$

Schlußendlich folgert man

$$e^{-y} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Gleichung $1 = e^{-y} \cos(k\pi) = e^{-y} (-1)^k$ liefert, dass k gerade ist und $y = 0$. Die Problemstellen sind also

$$\{2m\pi; m \in \mathbb{Z}\}.$$

Innerhalb der Kurve liegt nur eine Problemstelle, nämlich 0. Weil

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} z^{2k}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} z^{2k-2}} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} z^{2k}} = 2, \end{aligned}$$

können wir den Hebbbarkeitssatz verwenden. Das heißt, die Funktion $z \mapsto \frac{z^2}{1 - \cos z}$ in 0 erweitert durch 2, ist holomorph und

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{1 - \cos z} dz = 0.$$

Beispiel 5.12. Berechne $\int_{\gamma} \frac{z}{1 - \cos z} dz$ für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = 3e^{it}$. Die Problemstellen sind noch immer

$$\{2m\pi; m \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir finden mit Hilfe von der Potenzreihe zum Cosinus und

$$\frac{1}{1 - r} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k,$$

dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \cos z} &= \frac{1}{\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{24}z^4 + \mathcal{O}(z^6)} = \frac{2}{z^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{12}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\right)} = \\ &= \frac{2}{z^2} \left(1 + \left(\frac{1}{12}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{12}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\right)^2\right) = \\ &= \frac{2}{z^2} + \frac{1}{6} + \mathcal{O}(z^2). \end{aligned}$$

Das bedeutet,

$$\frac{z}{1 - \cos z} = 2z^{-1} + g(z)$$

mit g holomorph in einer Umgebung von 0. Es gilt

$$\int_{\gamma} \frac{z}{1 - \cos z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{z}{1 - \cos z} \right) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{2}{z} \right) = 4\pi i.$$

Beispiel 5.13. Berechne $\int_{\gamma} \frac{1}{1 - \cos z} dz$ für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = 3e^{it}$. Die Problemstellen sind noch immer

$$\{2m\pi; m \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir finden

$$\frac{1}{1 - \cos z} = 2z^{-2} + 0z^{-1} + \tilde{g}(z) = 2z^{-2} + \tilde{g}(z)$$

mit \tilde{g} holomorph in einer Umgebung von 0. Weil $z \mapsto 2z^{-2}$ eine Stammfunktion hat und \tilde{g} holomorph ist, gilt

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1 - \cos z} dz = \int_{\gamma} (2z^{-2} + \tilde{g}(z)) dz = 0.$$

Beispiel 5.14. Berechne $\int_{\gamma} e^{\frac{1}{z}} dz$ für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = 3e^{it}$. Die Problemstelle ist $z = 0$. Weil $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ eine wesentliche Singularität hat (eine Abschätzung wie in (5.7) gibt es nicht) muss uns etwas anderes einfallen.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^{\frac{1}{z}} dz &= \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{3e^{it}}} 3ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{3}e^{-it}} 3ie^{it} dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{3}e^{-it}} \frac{1}{\left(\frac{1}{3}e^{-it}\right)^2} \left(-i\frac{1}{3}e^{-it}\right) dt = \\ &= - \int_{\mu} e^z \frac{1}{z^2} dz \end{aligned}$$

mit $\mu : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\mu(t) = \frac{1}{3}e^{-it}$. Die Kurve μ dreht einmal rechts um 0 herum. Weil

$$e^z = 1 + z + z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} z^k,$$

folgt

$$- \int_{\mu} e^z \frac{1}{z^2} dz = - \int_{\mu} \frac{1}{z^2} (1 + z + z^2 g(z)) dz = - \int_{\mu} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + g(z) \right) dz$$

mit g holomorph. Also gilt, weil μ rechtsherum läuft:

$$- \int_{\mu} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + g(z) \right) dz = - \int_{\mu} \frac{1}{z} dz = -(-2\pi i) = 2\pi i.$$

5.5 Pole und wesentliche Singularitäten

Betrachte man eine Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die holomorph ist auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$, dann sagt Lemma 5.10, dass es genau die folgenden drei Möglichkeiten gibt:

1. Die Singularität in z_0 ist **hebbar**²:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ existiert.}$$

Ausserdem gilt, dass die erweiterte Funktion

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) & \text{für } z = z_0, \end{cases}$$

holomorph ist auf $B_r(z_0)$;

²Englisch: removable singularity

2. Die Singularität in z_0 ist **ein Pol n -ter Ordnung** mit $n \in \mathbb{N}^+$.
Hier ist n die kleinste Zahl in \mathbb{N}^+ , für die gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \text{ existiert.}$$

Außerdem gilt, dass es Konstanten $c_i \in \mathbb{C}$ mit $c_n \neq 0$ und eine holomorphe Funktion h auf $B_r(z_0)$ gibt derart, dass

$$f(z) = \frac{c_n}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{n-1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_1}{z - z_0} + h(z) \text{ für } z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

3. Die Singularität in z_0 ist **wesentlich**³:

Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$ existiert.

Es folgt, dass auf jeder Umgebung U von z_0 und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $z \mapsto |z - z_0|^n |f(z)|$ unbeschränkt ist.

Ein Beispiel für eine Funktion mit einer wesentlichen Singularität bei 0 ist $z \mapsto e^{1/z}$.
Siehe Abbildungen 5.6 und 5.7.

³Englisch: essential singularity

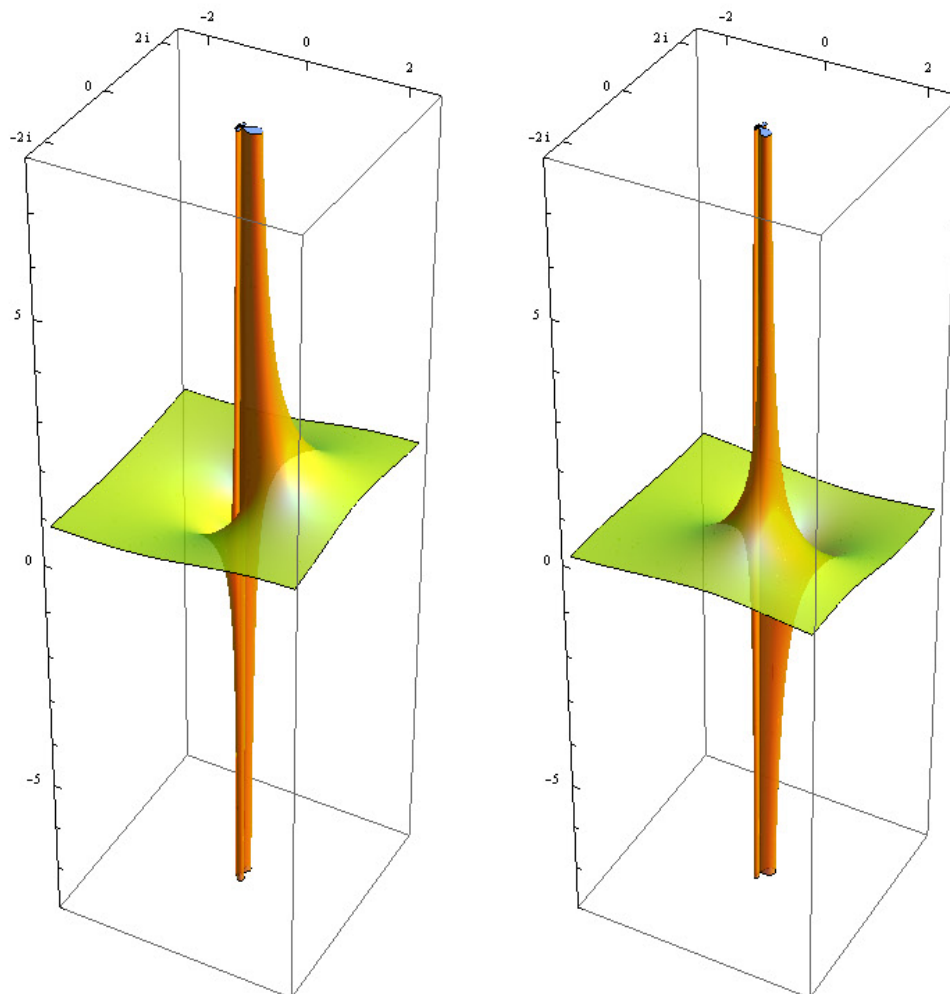


Abbildung 5.7: Skizzen zu $\operatorname{Re}(e^{1/z})$ und $\operatorname{Im}(e^{1/z})$. Siehe auch Abbildung 5.6.

Funktionentheorie, Woche 6



Analytische Funktionen

6.1 Holomorphe Funktionen und Potenzreihen

Definition 6.1. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und sei U eine Umgebung von z_0 . Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ nennt man **analytisch** in z_0 , wenn es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius gibt derart, dass $r > 0$ existiert mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \quad \text{für } z \in B_r(z_0).$$

Wir haben schon bewiesen, dass Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius komplex differenzierbar, also holomorph, sind.

Theorem 6.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ und sei $B_r(z_0) \subset U$. Dann gilt für die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n, \quad (6.1)$$

dass sie einen Konvergenzradius $R \geq r$ hat und dass

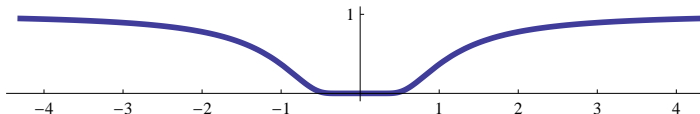
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0).$$

Bemerkung 6.2.1. Weil Potenzreihen differenzierbar sind innerhalb des Konvergenzradius, sind analytische Funktionen holomorph. Aus dem Theorem folgt, dass holomorphe Funktionen analytisch sind. Also gilt für offene Gebiete $U \subset \mathbb{C}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ folgendes:

$$f \text{ analytisch auf } U \Leftrightarrow f \text{ holomorph auf } U.$$

Bemerkung 6.2.2. Man sollte sich erinnern, dass in (6.1) genau die Taylorreihe zu f steht. In \mathbb{R} hat man jedoch das einigermaßen unbefriedigende Ergebnis, dass die Taylorreihe existieren kann, obwohl diese Reihe nicht unbedingt zu der Funktion konvergiert.

Man erinnere sich an die folgende, beliebig oft differenzierbare Funktion f , die in 0 die triviale Potenzreihe als Taylorreihe hat:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x^{-2})} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$


Für eine Funktion, die holomorph ist in z_0 , gibt es wegen der Definition eine Umgebung $B_r(z_0)$, in der sie holomorph ist, und das Theorem sagt aus, dass diese Funktion als die Potenzreihe in (6.1) zu schreiben ist. Anders gesagt, bei komplex differenzierbaren Funktionen konvergiert die Taylorreihe zu der Funktion.

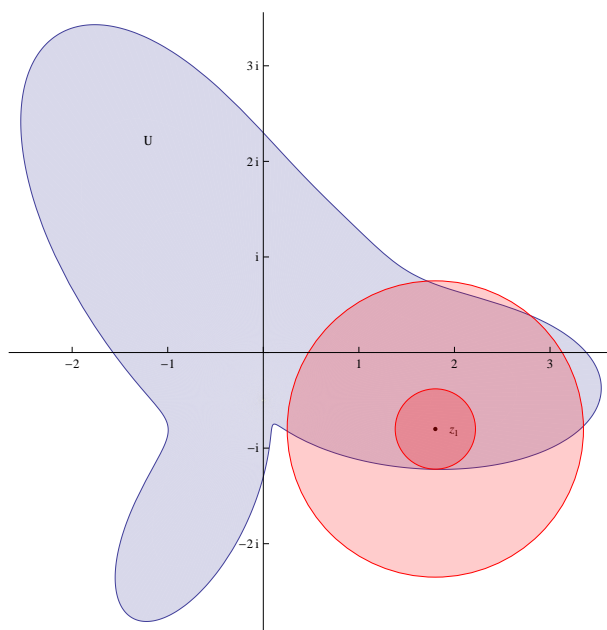


Abbildung 6.1: Sei f holomorph auf U . Theorem 6.2 besagt, dass im kleinen Kreis $B_r(z_1)$ um z_1 die Funktion als Potenzreihe p zu schreiben ist. Wenn diese Potenzreihe einen größeren Konvergenzradius R hat, dann hat man eine holomorphe Funktion auf $B_R(z_1)$, die auf $B_r(z_1)$ gleich f ist. Wenn sie auf $U \cap B_R(z_1)$ übereinstimmen, hat man eine holomorphe Fortsetzung von f auf $U \cup B_R(z_1)$ gefunden. Man soll sich also noch überlegen, wieso die Potenzreihe und f auf $U \cap (B_R(z_1) \setminus B_r(z_1))$ übereinstimmen.

Beweis. Aus der Integralformel von Cauchy folgt, dass für jede $\rho < r$ und $z \in B_\rho(z_0)$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Verwenden wir, dass für $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| < 1$ folgendes gilt

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n,$$

bekommen wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=\rho} \left(\frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n \right) dw.$$

Für festes $z \in B_\rho(z_0)$ gilt $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| \leq \frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$ und die Reihe konvergiert gleichmäßig. Wegen dieser gleichmäßigen Konvergenz dürfen wir beide Grenzprozesse, das heißt Integral und unendliche Summe, vertauschen und es folgt, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n$$

Für die Potenzreihe zu f hat man

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (6.2)$$

Diese letzte Identität folgt aus (5.4).

Weil diese Reihe konvergiert für alle z mit $|z-z_0| < \rho$, ist der Konvergenzradius größer oder gleich ρ . Weil $\rho < r$ beliebig ist, ist der Konvergenzradius größer oder gleich r . \square

Ein Zwischenergebnis wollen wir noch festhalten:

Lemma 6.3. Sei $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und sei $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Es gilt

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz. \quad (6.3)$$

Beweis. Dieses Ergebnis steht genau in (6.2). \square

Korollar 6.4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und nehme an, $B_R(z_0) \subset U$ und $w \in \partial B_R(z_0) \cap U$. Sei $f : U \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nehme an, dass f eine nicht-hebbare Singularität in w besitzt. Dann hat die Taylorreihe zu f bei z_0 , das heißt die Potenzreihe in (6.1), Konvergenzradius R .

Bemerkung 6.4.1. Wenn wir dieses Korollar in Worte fassen wollen, kann man das Ergebnis wie folgt beschreiben: Betrachtet man bei einer holomorphen Funktion eine Taylorreihe mit ihrem Konvergenzgebiet, dann wird f auf dem Rand dieses Kreises, jedenfalls wenn f auf dem ganzen Kreis definiert ist, irgendwo singulär sein.

Beweis. Aus (6.3) folgt, dass für alle $r < R$ gilt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{2\pi r}{r^{n+1}} M_r$$

für $M_r = \max \{|f(z)|; |z-z_0| \leq r\}$. Es folgt, dass

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z-z_0)^n \right| \leq \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^n M_r.$$

Wenn man $|z-z_0| < r$ nimmt, folgt, dass die Potenzreihe in (6.1) konvergiert. Also findet man, dass der Konvergenzradius größer gleich r ist. Weil man r beliebig nahe an R nehmen kann, ist der Konvergenzradius mindestens R .

Wenn die Taylorreihe in (6.1) auf $B_{\tilde{R}}(z_0)$ mit $\tilde{R} > R$ konvergiert, dann ist die Reihe als Funktion identisch zu f auf $B_r(w) \setminus \{w\}$ und f hat eine hebbare Singularität in w . Dies ist ein Widerspruch. Also ist der Konvergenzradius höchstens R . \square

Beispiel 6.5. Betrachte die Potenzreihe zu $\text{Log}(z)$ um $z_0 = 1 + i$. Man findet

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \text{Log}(z) = (-1)^{n-1} (n-1)! z^{-n} \text{ für } n \geq 1. \quad (6.4)$$

Dann folgt für $|z - 1 - i| < R$, dass

$$\begin{aligned} \text{Log}(z) &= \text{Log}(1+i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+i)^n} (z-1-i)^n = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} e^{\frac{3}{4} \pi i}\right)^n (z-1-i)^n. \end{aligned}$$

Für den Konvergenzradius gilt $R = \left|\frac{1}{2} \sqrt{2} e^{\frac{3}{4} \pi i}\right|^{-1} = \sqrt{2}$. Das passt zu der bekannten Singularität vom Logarithmus in 0.

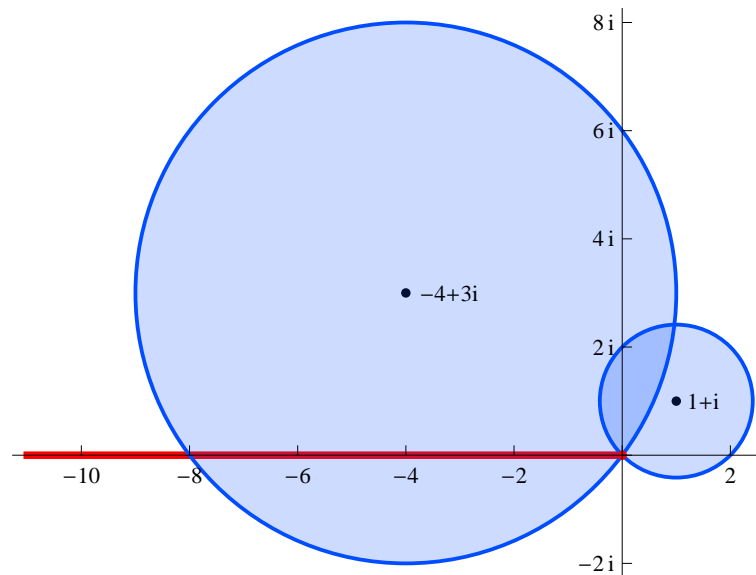


Abbildung 6.2: Definitionsbereiche von Log und von den zwei zugehörigen Potenzreihen aus Beispiel 6.5 und 6.6.

Beispiel 6.6. Betrachte die Potenzreihe zu $\text{Log}(z)$ um $z_0 = -4 + 3i$. Die Ableitungen sind wie in (6.4) und es folgt für $|z - (-4 + 3i)| < R$ mit $\text{Im } z > 0$, dass

$$\begin{aligned} \text{Log}(z) &= \text{Log}(-4 + 3i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(-4 + 3i)^n} (z - (-4 + 3i))^n = \\ &= \ln 5 + \left(\pi - \arctan \frac{3}{4}\right) i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{5} e^{i \arctan \frac{3}{4}}\right)^n (z - (-4 + 3i))^n. \end{aligned}$$

Für den Konvergenzradius gilt $R = \left|\frac{1}{5} e^{i \arctan(3/4)}\right|^{-1} = 5$. Das scheint nicht zu passen zur Unstetigkeit vom Logarithmus auf $(-\infty, 0]$, oder? Man erinnere sich aber, dass 0 die eigentliche Singularität vom Logarithmus ist und dass man für eine passende Definition, die $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ holomorph erweitert, einen Sprung haben soll auf irgendeiner Kurve, die 0 mit " $\infty_{\mathbb{C}}$ " verbindet. Man findet für $|z - (-4 + 3i)| < 5$, dass

$$\text{Log}(-iz) + \frac{1}{2} \pi i = \text{Log}(-4 + 3i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(-4 + 3i)^n} (z - (-4 + 3i))^n.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Arg}(z) \in (-\frac{1}{2}\pi, \pi)$ gilt $\text{Log}(-iz) + \frac{1}{2}\pi i = \text{Log}(z)$.

Beispiel 6.7. Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ berechnen und betrachten dazu

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz$$

für die geschlossene Kurve $\Gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$ mit

$$\begin{aligned} \gamma_{1,R} &: [-R, R] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } \gamma_{1,R}(t) = t, \\ \gamma_{2,R} &: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } \gamma_{2,R}(t) = R e^{it}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz,$$

$$\left| \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz \right| \leq \text{Länge}(\gamma_{2,R}) \sup_{|z| \in R} \left| \frac{1}{(z^2+1)^2} \right| \leq \pi R \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

und $\lim_{R \rightarrow \infty} \pi R \frac{1}{(R^2-1)^2} = 0.$

Verwenden wir, dass man die Funktion $z \mapsto \frac{1}{(z+i)^2}$, die nur in $-i$ eine Singularität besitzt, bei $z_0 = i$ als Potenzreihe mit Konvergenzradius $|i - -i| = 2$ schreiben kann, so finden wir

$$\frac{1}{(z+i)^2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i(z-i) + (z-i)^2 h(z),$$

wobei $h : B_2(i) \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ist. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz &= 2\pi i \text{Res}_{z=i} \left(\frac{1}{(z^2+1)^2} \right) = 2\pi i \text{Res}_{z=i} \left(\frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{(z+i)^2} \right) = \\ &= 2\pi i \text{Res}_{z=i} \left(\frac{1}{(z-i)^2} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i(z-i) + (z-i)^2 h(z) \right) \right) = \\ &= 2\pi i \text{Res}_{z=i} \left(-\frac{1}{4}(z-i)^{-2} - \frac{1}{4}i(z-i)^{-1} + h(z) \right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}i \right) = \frac{1}{2}\pi, \end{aligned}$$

und

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz - \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz \right) = \frac{1}{2}\pi.$$

Wie wir soeben beim Logarithmus gesehen haben, kann der Konvergenzradius größer sein als a-priori vom Definitionsgebiet zugelassen wird. Auf diese Weise läßt sich oft eine holomorphe Funktion erweitern zu einer holomorphen Funktion mit größerem Definitionsgebiet.

Theorem 6.8 (zur eindeutigen Fortsetzung). Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f_i : U_i \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Sei $z_0 \in U_1 \cap U_2$ und nehme an, es gibt $r > 0$ mit

$$f_1(z) = f_2(z) \text{ für } z \in B_r(z_0).$$

Dann gilt für jedes Gebiet $A \subset U_1 \cap U_2$ mit $z_0 \in A$:

$$f_1(z) = f_2(z) \text{ für } z \in A.$$

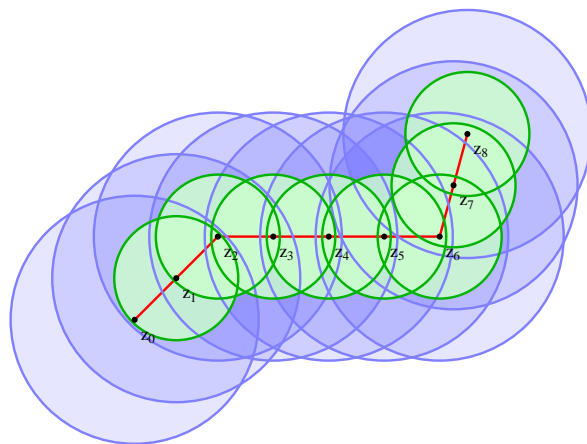


Abbildung 6.3: Skizze zum Beweis von Theorem 6.8.

Bemerkung 6.8.1. Ein Gebiet in \mathbb{C} ist eine offene zusammenhängende Menge. Dieser Zusammenhang ist ein wesentlicher Bestandteil des Theorems.

Beweis. Sei $z_* \in A$. Weil A offen und zusammenhängend ist, gibt es einen Polygonzug ℓ , der z_0 mit z_* innerhalb von A verbindet. Sei d die Distanz von ℓ zu A^c .

Man kann endlich viele Kreisscheiben $\{B_d(z_i)\}_{i=1}^n$ wählen derart, dass $z_i \in \ell$, $z_n = z_*$ und $|z_i - z_{i-1}| \leq \frac{1}{2}d$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Weil $f_1 = f_2$ auf $B_d(z_0)$ und $B_{\frac{1}{2}d}(z_1) \subset B_d(z_0)$, haben f_1 und f_2 die gleiche Potenzreihe p_1 auf $B_{\frac{1}{2}d}(z_1)$. Weil diese Potenzreihe konvergiert auf $B_d(z_1)$, findet man

$$f_1 = p_1 = f_2 \text{ auf } B_d(z_1).$$

Ähnlich folgt mit der Potenzreihe p_2 zu $f_1 = f_2$ auf $B_{\frac{1}{2}d}(z_2)$, dass

$$f_1 = p_2 = f_2 \text{ auf } B_d(z_2).$$

Nach n Schritten hat man $f_1(z_*) = f_2(z_*)$. □

6.2 Nullstellen eines Polynoms

Als eine Folge von der Formel von Cauchy bekommt man den Hauptsatz der Algebra:

Korollar 6.9. Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und seien $\alpha_i \in \mathbb{C}$ für $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Betrachten wir das Polynom

$$p(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \alpha_{n-2}z^{n-2} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0. \quad (6.5)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit haben wir $\alpha_n = 1$ genommen.

Der erste Schritt des Beweises ist die folgende Abschätzung. Es gilt für $|z| \geq R_0 :=$

$2n \max \{|\alpha_{n-1}|, |\alpha_{n-2}|, |\alpha_{n-3}|, \dots, |\alpha_1|, |\alpha_0|\} + 1$, dass

$$\begin{aligned}
 |p(z)| &= |z|^n \left| 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \frac{\alpha_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{\alpha_1}{z^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{z^n} \right| \geq \\
 &\quad \dots \text{Dreiecksungleichung} \dots \\
 &\geq |z|^n \left(1 - \left| \frac{\alpha_{n-1}}{z} \right| - \left| \frac{\alpha_{n-2}}{z^2} \right| - \dots - \left| \frac{\alpha_1}{z^{n-1}} \right| - \left| \frac{\alpha_0}{z^n} \right| \right) \geq \\
 &\quad \dots \text{wegen } |z| \geq R_0 \geq 1 \dots \\
 &\geq |z|^n \left(1 - \frac{|\alpha_{n-1}|}{|z|} - \frac{|\alpha_{n-2}|}{|z|^2} - \dots - \frac{|\alpha_1|}{|z|} - \frac{|\alpha_0|}{|z|^n} \right) \geq \\
 &\quad \dots \text{wegen } |z| \geq R_0 \geq 2n |\alpha_i| \dots \\
 &\geq |z|^n \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \dots - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} |z|^n. \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

Für den zweiten Schritt nehmen wir an, dass p keine Nullstelle hat. Dann ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} \tag{6.7}$$

eine holomorphe Funktion. Aus der Formel von Cauchy folgt dann für $R > R_0$, dass

$$\begin{aligned}
 |f(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-0} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=R} \frac{1}{zp(z)} dz \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left| \frac{1}{Re^{it} p(Re^{it})} iRe^{it} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left| \frac{1}{\frac{1}{2}R^n} \right| dt = 2R^{-n}.
 \end{aligned}$$

In der letzten Ungleichung verwendet man (6.6). Weil diese Abschätzung gilt für alle $R > R_0$, folgt $f(0) = 0$. Für f , definiert in (6.7), ist das ein Widerspruch. \square

Wenn man das Polynom p aus (6.5) durch $z - z_1$ dividiert, findet man $\beta_{n-2}, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0$ und β_* in \mathbb{C} , mit

$$\frac{p(z)}{z - z_1} = z^{n-1} + \beta_{n-2}z^{n-2} + \dots + \beta_1z + \beta_0 + \frac{\beta_*}{z - z_1}.$$

Also gilt

$$p(z) = (z^{n-1} + \beta_{n-2}z^{n-2} + \dots + \beta_1z + \beta_0)(z - z_1) + \beta_*.$$

Wenn z_1 eine Nullstelle von p ist, dann folgt, dass $\beta_* = 0$ und so auch

$$\frac{p(z)}{z - z_1} = z^{n-1} + \beta_{n-2}z^{n-2} + \dots + \beta_1z + \beta_0.$$

Das ist wieder ein Polynom, diesmal vom Grad $n - 1$. Also kann man wiederholt das Korollar anwenden und findet schlußendlich, dass ein Polynom vom Grad n genau n Nullstellen hat, jedenfalls wenn man die Nullstellen einschließlich der Multiplizität zählt:

Theorem 6.10. Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Sei $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ das Polynom

$$p(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \alpha_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0.$$

Dann gibt es $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

6.3 Das Maximum-Prinzip

Die Formel von Cauchy erlaubt es uns, holomorphe Funktionen abzuschätzen.

Korollar 6.11. Sei $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und U offen. Wenn $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, dann gilt entweder

1. $|f(z_0)| < \max \{|f(z)|; z \in \partial B_r(z_0)\}$, oder
2. $|f(z)| = |f(z_0)|$ für alle $z \in \partial B_r(z_0)$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq \max \{|f(z)|; z \in \partial B_r(z_0)\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Man findet

$$|f(z_0)| \leq \max \{|f(z)|; z \in \partial B_r(z_0)\}. \quad (6.9)$$

Wenn diese letzte Ungleichung strikt ist, finden wir die erste Behauptung.

Nehmen wir nun an, in (6.9) steht ein Gleichheitszeichen. Dann müssen die beiden Ungleichungen in (6.8) sogar Gleichungen sein. Wenn die zweite Behauptung nicht gilt, hat man

$$|f(z_0 + re^{it_0})| < \max \{|f(z)|; z \in \partial B_r(z_0)\}$$

für irgendein $t_0 \in [0, 2\pi]$, und gilt wegen der Stetigkeit, dass für $|t - t_0|$ genügend klein

$$|f(z_0 + re^{it})| < \max \{|f(z)|; z \in \partial B_r(z_0)\},$$

und der Widerspruch durch eine strikte Ungleichung in (6.8) folgt. \square

Übrigens liefert die Formel von Cauchy auch folgendes Ergebnis:

Korollar 6.12. Sei $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und U offen. Wenn $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, dann gilt die erste **Mittelwerteigenschaft**:

$$f(z_0) = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}. \quad (6.10)$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \leq \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi \end{aligned}$$

und das ist genau die Aussage in (6.10). \square

Bemerkung 6.12.1. Aus (6.10) folgt sofort, dass

- entweder

$$\min_{z \in \partial B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)) < \operatorname{Re}(f(z_0)) < \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)), \quad (6.11)$$

- oder

$$\min_{z \in \partial B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(f(z_0)) = \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)). \quad (6.12)$$

Die schwache Ungleichungen, also \leq , in (6.11) folgen durch die Mittelwerteigenschaft. Wenn eine Ungleichung sogar eine Gleichung ist, folgt wie im Beweis von Korollar 6.11, dass $\operatorname{Re}(f)$ konstant ist auf $\partial B_r(z_0)$ und dann auch, dass beide schwache Ungleichungen nun Gleichungen sein müssen.

Ähnliches gilt für $\operatorname{Im}(f)$.

Korollar 6.13. Sei $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und U offen. Wenn $\overline{B_R(z_0)} \subset U$, dann gilt die zweite **Mittelwerteigenschaft**:

$$f(z_0) = \frac{\int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) r d\varphi dr}{\int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} r d\varphi dr}. \quad (6.13)$$

Bemerkung 6.13.1. Ähnlich wie in Bemerkung 6.12.1 folgt aus (6.13) auch hier sofort, dass

- entweder

$$\min_{z \in B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)) < \operatorname{Re}(f(z_0)) < \max_{z \in B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)),$$

- oder

$$\min_{z \in B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(f(z_0)) = \max_{z \in B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)).$$

Auch hier gilt ähnliches für $\operatorname{Im}(f)$.

Beweis. Weil (6.10) gilt für jedes $r \in [0, R]$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) r d\varphi dr &= 2\pi \int_{r=0}^R f(z_0) r dr = \\ &= \pi R^2 f(z_0) = f(z_0) \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} r d\varphi dr. \end{aligned}$$

□

Theorem 6.14 (Das Maximum-Prinzip für holomorphe Funktionen). Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei f holomorph auf U .

- Wenn $z \mapsto |f(z)|$ ein lokales Maximum hat in $z_0 \in U$, dann ist f konstant.
- Falls U beschränkt ist und f stetig auf \overline{U} ist, nimmt $|f|$ das Maximum an auf ∂U .

Beweis. Wenn $|f|$ ein lokales Maximum in z_0 hat, also $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für $z \in B_{r_0}(z_0)$ und ein $r_0 > 0$, dann gilt wegen Korollar 6.11, dass

$$|f(z_0)| = \max \{|f(z)|; z \in \partial B_r(z_0)\} \quad (6.14)$$

für $r \in (0, r_0)$. Das heißt, $|f|$ ist konstant auf $B_{r_0}(z_0)$. Wenn $f(z_0) = 0$ folgt $f(z) = 0$ auf $B_{r_0}(z_0)$. Wenn $f(z_0) \neq 0$, dann folgt aus der Stetigkeit, dass $f(z)/f(z_0)$ in der Nähe von 1 liegt für $|z - z_0|$ genügend klein. Dann ist

$$z \mapsto \operatorname{Log}(f(z)/f(z_0)) \quad (6.15)$$

in einer Umgebung von z_0 , sagen wir auf $B_{r_1}(z_0)$ eine wohldefinierte holomorphe Funktion. Sie hat wegen (6.14) einen konstanten Realteil auf $B_{r_1}(z_0)$:

$$\operatorname{Re}(\operatorname{Log}(f(z)/f(z_0))) = \ln |f(z)/f(z_0)| = \ln(1) = 0.$$

Aus den Cauchy-Riemann Gleichungen folgt $\partial_y v = \partial_x u = 0$ und $\partial_x v = -\partial_y u = 0$, und dass auch der Imaginärteil von (6.15) konstant ist. Wir finden

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Log}(f(z)/f(z_0))) = \operatorname{Arg}(f(z)/f(z_0)) = \operatorname{Arg}(f(z_0)/f(z_0)) = \operatorname{Arg}(1) = 0$$

und

$$\operatorname{Log}(f(z)/f(z_0)) = 0 \text{ für } z \in B_{r_1}(z_0).$$

Dann ist f konstant in einer Umgebung von z_0 , denn

$$f(z)/f(z_0) = e^{\operatorname{Log}(f(z)/f(z_0))} = e^0 = 1.$$

Die Fortsetzung, wie in Lemma 6.8 zeigt, dass f konstant ist auf U .

Für die zweite Aussage erinnert man sich, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge, hier \bar{U} , ihr Maximum annimmt. Wenn sie nicht konstant ist, kann das Maximum nur auf ∂U liegen. Wenn sie konstant ist, liegt das Maximum übrigens auch auf ∂U . \square

Lemma 6.15 (Minimum-Prinzip für holomorphe Funktionen). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Wenn $z \mapsto |f(z)|$ ein lokales Minimum hat in $z_0 \in U$, dann gilt $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant auf U .*

Beweis. Wenn $|f(z_0)| > 0$, dann ist $g : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

für $r > 0$ genügend klein, holomorph auf $B_r(z_0)$ und es gilt wegen des Maximum-Prinzips entweder, dass $g(z)$ konstant auf $B_r(z_0)$ ist oder

$$|g(z_0)| < \max_{z \in B_r(z_0)} |g(z)|.$$

Weil $\max_{z \in B_r(z_0)} |g(z)| = |g(z_0)|$ folgt $g(z)$ ist konstant auf $B_r(z_0)$. Dann ist auch $f(z)$ konstant auf $B_r(z_0)$ und wegen der eindeutigen Fortsetzung sogar auf U . \square

Funktionentheorie, Woche 7

$f(z)$

Eigenschaften holomorpher Funktionen

7.1 Ganze Funktionen

Definition 7.1. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die holomorph ist auf \mathbb{C} , nennt man eine **ganze Funktion**.

Bemerkung 7.1.1. Als Folge von Theorem 6.2 kann man jede ganze Funktion schreiben als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, die, weil sie Konvergenzradius ∞ hat, auf ganz \mathbb{C} definiert ist.

Selbstverständlich sind Polynome ganze Funktionen. Ganze Funktionen, die kein Polynom sind, wie zum Beispiel $z \mapsto e^z$, nennt man **transzendente ganze Funktionen**.

Theorem 7.2. Sei f eine ganze Funktion f . Wenn es $n \in \mathbb{N}$ und $C \in \mathbb{R}^+$ gibt derart, dass

$$|f(z)| \leq C(|z|^n + 1) \text{ f\"ur alle } z \in \mathbb{C},$$

dann ist f ein Polynom vom Grad h\"ochstens n .

Beweis. Betrachte die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m z^m.$$

Lemma 6.3 zeigt

$$\alpha_m = \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(w)}{w^{m+1}} dw$$

und es folgt, dass

$$\begin{aligned} |\alpha_m| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(w)}{w^{m+1}} dw \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^{m+1} e^{(m+1)it}} i r e^{it} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left| \frac{f(re^{it})}{r^m} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{C(r^n + 1)}{r^m} dt = C \frac{r^n + 1}{r^m}. \end{aligned}$$

Für $m > n$ gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^n + 1}{r^m} = 0$$

und folgt $|\alpha_m| = 0$. Dann gilt $f(z) = \sum_{m=0}^n \alpha_m z^m$ und f ist ein Polynom. \square

Theorem 7.3 (Liouville, Fassung 1). *Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Beschränkt heißt: es gibt $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(z)| \leq M \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Mit Hilfe von Theorem 7.2 folgt das Ergebnis \square

Es gibt noch eine schärfere Version:

Theorem 7.4 (Liouville, Fassung 2). *Eine ganze Funktion, deren Realteil einseitig beschränkt ist, ist konstant.*

Beweis. Nehmen wir an, es gibt $m \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re}(f(z)) \leq m \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Es gilt

$$|m + 1 - f(z)| \geq |\operatorname{Re}(m + 1 - f(z))| \geq \operatorname{Re}(m + 1 - f(z)) \geq 1.$$

Dann ist $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$g(z) = \frac{1}{m + 1 - f(z)},$$

holomorph und es gilt

$$|g(z)| \leq 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Theorem 7.3 liefert das Ergebnis. \square

7.2 Äquivalente Aussagen

Theorem 7.5. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *f ist holomorph auf U :
für jedes $u \in U$ existiert $f'(u)$.*
2. *f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen auf U :
 $u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$ und $v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$ sind differenzierbar für $x + iy \in U$ und $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ gelten.*
3. *f hat lokal eine Stammfunktion:
für jedes $z_0 \in U$ gibt es $B_r(z_0) \subset U$ mit $r > 0$ und $F : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$.*
4. *f ist analytisch auf U :
für jedes $z_0 \in U$ gibt es $B_r(z_0) \subset U$ mit $r > 0$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ für $z \in B_r(z_0)$.*

Einen Beweis findet man, indem man die bis jetzt bewiesenen Ergebnisse kombiniert. Wir legen auch noch mal fest:

Definition 7.6. Sei $z_0 \in U$ und $U \subset \mathbb{C}$ offen.

- Eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle von der Ordnung $n \in \mathbb{N}^+$, wenn

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k \quad (7.1)$$

mit $\alpha_n \neq 0$.

- Eine holomorphe Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ hat einen Pol vom Grad $n \in \mathbb{N}^+$, wenn

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k \quad (7.2)$$

mit $\alpha_n \neq 0$.

Man sieht sofort, dass wenn die holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Nullstelle von der Ordnung n in z_0 hat, die Funktion

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{-n} f(z) & \text{für } z \in U \setminus \{z_0\}, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z) & \text{in } z_0, \end{cases}$$

holomorph ist auf U . Bemerke, dass

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z) = \alpha_n \text{ und } \alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Ähnlich gilt für $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit einem Pol vom Grad n , dass die Funktion

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^n f(z) & \text{für } z \in U \setminus \{z_0\}, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) & \text{in } z_0, \end{cases}$$

holomorph ist auf U .

Theorem 7.7 (Identitätssatz). Sei U ein Gebiet in \mathbb{C} und sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. $f(z) = 0$ für alle $z \in U$.
2. Es gibt $z_0 \in U$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3. Die Menge $\{z \in U; f(z) = 0\}$ hat einen Häufungspunkt in U .

Beweis. 2 \implies 1: Wenn $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

gleich Null, hat also trivialerweise Konvergenzradius ∞ . Dann gilt für die größte Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset U$, dass $f(z) = p(z) = 0$ auf $B_r(z_0)$. Für $z_1 \in B_r(z_0)$ kann man anschließend $B_{r_1}(z_1) \subset U$ finden mit $f(z) = 0$ auf $B_{r_1}(z_1)$ usw. Die eindeutige Fortsetzung liefert, dass $f \equiv 0$ auf U .

3 \implies 2: Sei z_0 ein Häufungspunkt von $\{z \in U; f(z) = 0\}$. Dann gibt es eine Folge $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ in $\{z \in U; f(z) = 0\} \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$. Weil f stetig ist, folgt

$$f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = 0.$$

Nehmen wir an, dass $f \not\equiv 0$. Dann gibt es ein kleinstes $m \in \mathbb{N}^+$ mit $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ und f hat eine Nullstelle in z_0 vom Grad m . Es folgt, dass $g : U \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{-m} f(z) & \text{für } z \in U \setminus \{z_0\}, \\ f^{(m)}(z_0)/m! & \text{in } z_0, \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion ist mit $g(z_0) \neq 0$. Es gilt auch, dass $g(z_k) = (z_k - z_0)^{-m} f(z_k) = 0$ und weil g stetig ist, folgt

$$g(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(z_k) = 0,$$

ein Widerspruch.

1 \implies 2, 3: Diese Beweisrichtung ist trivial. \square

7.3 Verbindung mit reellen Funktionen

Eine erste Bemerkung betrifft reell-analytische Funktionen.

Definition 7.8. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *reell-analytisch*, wenn es für jedes $x_0 \in I$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ und eine Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ gibt, mit $f(x) = p(x)$ für $|x - x_0| < \varepsilon$.

Betrachtet man $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$, dann ist diese Potenzreihe auch konvergent für $|z - x_0| < \varepsilon$ und man kann die Funktion f fortsetzen in eine komplexe Umgebung von x_0 .

In partiellen Differentialgleichungen spielt der sogenannte **Laplace-Operator**¹ eine wichtige Rolle. Für zwei Dimensionen ist er definiert durch

$$\Delta := \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2. \quad (7.3)$$

Zum Beispiel

$$\Delta (x^2 - y^2 + y^3 \sin x) = (2 - y^3 \sin x) + (-2 + 6y \sin x) = (6y - y^3) \sin x.$$

Definition 7.9. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn ihre zweiten Ableitungen auf Ω existieren und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \text{ für } (x, y) \in \Omega.$$

¹Der Laplace-Operator ist für n Dimensionen, das heißt für Funktionen

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R},$$

definiert durch

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2.$$

Proposition 7.10. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Definiere

$$U_{\mathbb{R}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + iy \in U\}.$$

Dann ist die Funktion $u : U_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$$

harmonisch.

Bemerkung 7.10.1. Wenn f holomorph ist, ist auch $-if$ holomorph. Weil $\operatorname{Re}(-if) = \operatorname{Im} f$, sieht man sofort, dass auch der Imaginärteil harmonisch ist.

Beweis. Wenn f holomorph ist, sind die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} f = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} f \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} f = -\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} f$$

Weil holomorph auch bedeutet, dass f' holomorph ist, existieren die zweiten und höheren Ableitungen und es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \operatorname{Re} f &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} f\right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} f\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} f\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \operatorname{Re} f. \end{aligned}$$

Also gilt $\Delta \operatorname{Re} f = 0$. □

Beispiel 7.11. Betrachten wir $f(z) = \frac{1}{z}$, so finden wir die harmonische Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x + iy} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Wenn man die harmonische Polynome in x und y betrachtet, kann man auch sofort eine holomorphe Funktion erkennen, deren Realteil das harmonische Polynom liefert:

| Grad | harmonische Polynome auf \mathbb{R}^2 | | Polynome auf \mathbb{C} | |
|------|---|-----------------------------------|---------------------------|-------------------|
| 1 | x | y | z | $-iz$ |
| 2 | $x^2 - y^2$ | xy | z^2 | $-\frac{i}{2}z^2$ |
| 3 | $x^3 - 3xy^2$ | $x^2y - \frac{1}{3}y^3$ | z^3 | $-\frac{i}{3}z^3$ |
| 4 | $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ | $x^3y - xy^3$ | z^4 | $-\frac{i}{4}z^4$ |
| 5 | $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$ | $x^4y - 2x^2y^3 + \frac{1}{5}y^5$ | z^5 | $-\frac{i}{5}z^5$ |

Tabelle 7.1: harmonische Polynome

Die Frage bietet sich an:

Kann man bei einer harmonischen Funktion u eine holomorphe Funktion f identifizieren so, dass $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$?

Beispiel 7.12. Betrachten wir $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Man berechnet direkt, dass

$$\begin{aligned} \Delta \ln(x^2 + y^2) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \ln(x^2 + y^2) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \ln(x^2 + y^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{2y}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Wenn man versucht eine holomorphe Funktion f zu identifizieren, kann man die Cauchy-Riemann Gleichungen verwenden. Wenn es f gibt, dann folgt für $v = \operatorname{Im} f$, dass $u_x = v_y$. Diese Gleichung liefert uns

$$\frac{\partial}{\partial y} v(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

und Integrieren nach y bringt (für $x > 0$)

$$v(x, y) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c(x).$$

Aus $v_x = -u_y$ folgt nun

$$\frac{-2y}{x^2 + y^2} + c'(x) = -\frac{2y}{x^2 + y^2}$$

und $c'(x) = 0$ ergibt, dass c konstant ist. Wir haben also gefunden, dass es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= u(x, y) + iv(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + ic = \\ &= 2 \operatorname{Log}(x + iy) + ic \text{ für } x > 0. \end{aligned}$$

Wenn man versucht eine solche Funktion f fortzusetzen auf $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \operatorname{Re} z \leq 0\}$, dann merkt man dass jede Fortsetzung einen Schnitt hat von 0 nach $\infty_{\mathbb{C}}$.

Dieses Beispiel zeigt, dass man den einfachen Zusammenhang des Gebietes als notwendige Bedingung braucht um bei beliebigen harmonischen Funktionen eine zugehörige holomorphe Funktion zu finden. Der nächste Satz zeigt, dass diese Bedingung auch ausreichend ist.

Theorem 7.13. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes, einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f : \Omega_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)).$$

Bemerkung 7.13.1. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definieren wir $\Omega_{\mathbb{C}} := \{x + iy \in \mathbb{C}; (x, y) \in \Omega\}$.

Wenn man wüßte, dass die zweiten Ableitungen von u stetig wären, dann definiert man $g : \Omega_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(x + iy) = u_x(x, y) - iu_y(x, y).$$

Es würde folgen, weil $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (u ist harmonisch) und weil $u_{xy} = u_{yx}$ (Satz von Schwarz), dass

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial x} g(x + iy) &= iu_{xx}(x, y) + u_{yx}(x, y) = \\ &= u_{xy}(x, y) - iu_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} g(x + iy) \end{aligned}$$

und so wären die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen für g erfüllt. Weil $\Omega_{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend ist, hätte g eine Stammfunktion G . Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ und definiere

$$f(z) = G(z) - G(x_0 + iy_0) + u(x_0, y_0).$$

Diese Funktion wäre holomorph und $\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y)$.

Wir wollen aber auskommen ohne die stetige Differenzierbarkeit der Ableitungen.

Beweis. Nehme $(x_0, y_0) \in \Omega$ und sei $\Gamma^{(x,y)} : [0, 1] \rightarrow \Omega$ eine stetig differenzierbare Kurve, die (x_0, y_0) mit (x, y) verbindet: $\Gamma^{(x,y)}(0) = (x_0, y_0)$ und $\Gamma^{(x,y)}(1) = (x, y)$. Setze

$$v(x, y) = \int_{\Gamma^{(x,y)}} \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} \cdot \vec{\tau} \, ds. \quad (7.4)$$

Weil für eine geschlossene linksherumdrehende Jordan-Kurve Γ innerhalb Ω gilt, dass der Tangentialvektor und der auswärtige Normalenvektor wie folgt zusammenhängen:

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

Man findet:

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} \cdot \vec{\tau} \, ds = \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \, ds.$$

Weil der Satz von Gauß uns folgendes liefert:

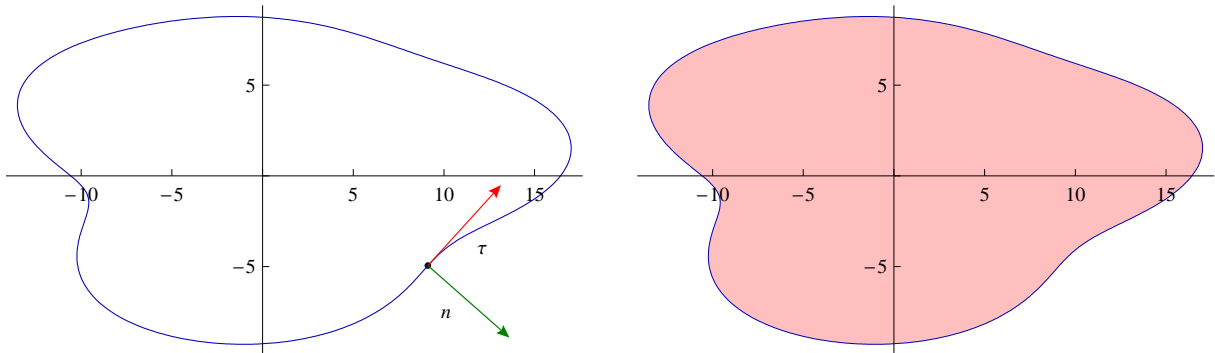


Abbildung 7.1: Für $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ hat man $\vec{\tau} = \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}$. Das Kurvenintegral in (7.5)-links gleicht dem Flächenintegral in (7.5)-rechts.

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\Omega} \Delta u \, d(x, y) \quad (7.5)$$

folgt

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} \cdot \vec{\tau} \, ds = 0.$$

Anders gesagt: Für einfach zusammenhängende Gebiete ist die Definition von v unabhängig vom Weg. Wie in Proposition 4.1 zeigt man, dass die partiellen Ableitungen von v existieren und dass

$$v_x = -u_y \quad \text{und} \quad v_y = u_x.$$

Setze $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Weil u und v reell differenzierbar sind und die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllen ist f holomorph. \square

7.3.1 Intermezzo

Für diejenigen, die Analysis 3 nicht gehört haben, folgt hier eine kurze Skizze zu der Gleichung in (7.5), wenn Ω konvex ist. Auch für nicht-konvexe Gebiete gilt ein ähnliches Ergebnis, wenn fast überall eine eindeutige Normalenrichtung auf dem Rand definiert ist.

Theorem 7.14 (Gauß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $\vec{F} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Auf dem Rand $\partial\Omega$ soll der auswärtige Normalenvektor \vec{n} wohldefiniert sein. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dx. \quad (7.6)$$

Bemerkung 7.14.1. Sei u zweimal stetig differenzierbar auf $\bar{\Omega}$. Die Identität

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\Omega} \Delta u \, dx \quad (7.7)$$

ist dann ein Spezialfall des Gaußschen Integralsatzes. Setze $\vec{F} = \nabla u$. Man findet $\nabla \cdot \vec{F} = \Delta u$ und (7.7) folgt aus (7.6).

Beweis für ein konvexes Gebiet in \mathbb{R}^2 . Wir nehmen also an, dass Ω konvex ist. Sei Γ eine linksherumdrehende Parametrisierung von $\partial\Omega$. Wir fangen an mit

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\Gamma} F_1 n_1 \, ds + \int_{\Gamma} F_2 n_2 \, ds = \dots$$

1. Man verteilt das erste Integral in einem Integral über der linken Seite, parametrisiert durch Γ_{links} , und einem über der rechten Seite, parametrisiert durch Γ_{rechts} . Ähnliches macht man beim zweiten Integral mit oben (Γ_{oben}) und unten (Γ_{unten}). Die Γ_{xxx} sind Teilkurven von Γ und als Kurvensumme gilt $\Gamma = \Gamma_{\text{rechts}} + \Gamma_{\text{links}} = \Gamma_{\text{oben}} + \Gamma_{\text{unten}}$.

$$\dots = \int_{\Gamma_{\text{links}}} F_1 n_1 \, ds + \int_{\Gamma_{\text{rechts}}} F_1 n_1 \, ds + \int_{\Gamma_{\text{oben}}} F_2 n_2 \, ds + \int_{\Gamma_{\text{unten}}} F_2 n_2 \, ds = \dots \quad (7.8)$$

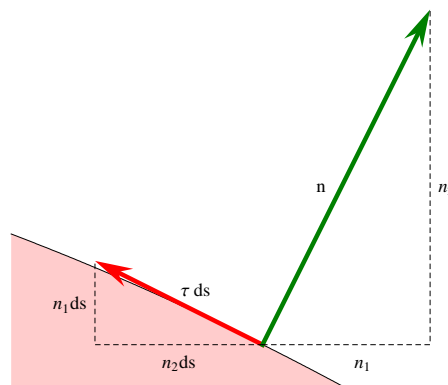


Abbildung 7.2: Eine geometrische Erklärung, wieso $-n_2 ds = \tau_1 ds = dx$ und $n_1 ds = \tau_2 ds = dy$ gelten.

2. Man macht eine Umparametrisierung der Kurven Γ_{xxx} in (7.8) durch

$$\begin{aligned} \text{links: } & [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit } y \mapsto (x_{\text{links}}(y), y), \\ \text{rechts: } & [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit } y \mapsto (x_{\text{rechts}}(y), y), \\ \text{oben: } & [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit } x \mapsto (x, y_{\text{oben}}(x)), \\ \text{unten: } & [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit } x \mapsto (x, y_{\text{unten}}(x)). \end{aligned}$$

Es gilt $n_1 ds = dy$ und $n_2 ds = -dx$. Man achte auf die Integralgrenzen:

$$\begin{aligned} \dots = & \int_{y_2}^{y_1} F_1(x_{\text{links}}(y), y) dy + \int_{y_1}^{y_2} F_1(x_{\text{rechts}}(y), y) dy + \\ & - \int_{x_2}^{x_1} F_2(x, y_{\text{oben}}(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y_{\text{unten}}(x)) dx = \dots \end{aligned}$$

3. Man passt die Richtung an und nimmt sie paarweise zusammen:

$$\begin{aligned} \dots = & \int_{y_1}^{y_2} \left(F_1(x_{\text{rechts}}(y), y) - F_1(x_{\text{links}}(y), y) \right) dy + \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \left(F_2(x, y_{\text{oben}}(x)) - F_2(x, y_{\text{unten}}(x)) \right) dx = \dots \end{aligned}$$

4. Man wendet den Hauptsatz der Integralrechnung an:

$$\dots = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_{\text{links}}(y)}^{x_{\text{rechts}}(y)} \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y) dx \right) dy + \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_{\text{unten}}(x)}^{y_{\text{oben}}(x)} \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y) dy \right) dx = \dots$$

5. Man verwendet Fubini-Tonelli:

$$\dots = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y) \right) d(x, y) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F}(x, y) d(x, y)$$

und man hat das gewünschte Ergebnis erreicht. □

Funktionentheorie, Woche 8

$f(z)$

Harmonische Funktionen in 2 Dimensionen

8.1 Die stationäre Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen nun eine Lösung u finden zum Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^2, \\ u = u_r & \text{auf } \partial B_1(0), \end{cases} \quad (8.1)$$

wenn u_r gegeben ist. Dieses Problem ist bekannt als die stationäre Wärmeleitungsgleichung auf der Einheitskreisscheibe bei gegebenen Randwerten.

Die Formel von Cauchy ergibt, dass bei einer holomorphen Funktion f die Randwerte der Funktion, die Werte im Innern bestimmen. Für $z \in B_1(0)$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (8.2)$$

Kann man bei einer harmonischen Funktion die Werte im Innern zurückfinden, wenn man die Randwerte kennt?

Wenn u harmonisch ist auf $B_1(0)$, dann gibt es eine holomorphe Funktion f auf $B_1(0)_{\mathbb{C}}$ mit $u = \operatorname{Re} f$. Wenn man jedoch nur u auf dem Rand kennt, wie findet man f ? Können wir vielleicht u im Innern finden, ohne vorher f kennen zu müssen? Die Antwort ist positiv. Wir können ohne weitere Kenntnisse von f aus den Randwerten von u diese harmonische Funktion u im Innern finden. Das macht man wie folgt für das Randwertproblem auf der Kreisscheibe (8.1):

Wir nehmen an, es gibt eine stetige Funktion $f : \overline{B_1(0)_{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathbb{C}$, holomorph auf $B_1(0)_{\mathbb{C}}$ und mit $u = \operatorname{Re} f$. Wenn $z \in B_1(0)_{\mathbb{C}}$, dann folgt, dass $1/\bar{z} \notin B_1(0)_{\mathbb{C}}$ und mit Cauchy folgt auch, dass

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{f(w)}{w-1/\bar{z}} dw. \quad (8.3)$$

Subtrahieren wir (8.3) von (8.2), dann bekommt man für $|z| < 1$ die folgende Formel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-1/\bar{z}} \right) f(w) dw.$$

Für $|w| = 1$ können wir diese Formel ändern, wenn wir den Ausdruck in Klammern wie folgt umrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-1/\bar{z}} &= \frac{1}{w-z} - \frac{\bar{z}w}{\bar{z}-w} = \\ &= \frac{(\bar{w}-\bar{z}) + \bar{z}w(w-z)}{(w-z)(\bar{w}-\bar{z})} = \frac{\bar{w}-|z|^2\bar{w}}{|z-w|^2} = \frac{1}{w} \frac{1-|z|^2}{|z-w|^2}. \end{aligned}$$

Also findet man

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{1}{w} \frac{1-|z|^2}{|z-w|^2} f(w) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\varphi}|^2} f(e^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Das Besondere an dieser Formel ist, dass nur f noch komplex ist. Man kann den Realteil abtrennen und es folgt

$$\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\varphi}|^2} \operatorname{Re}(f(e^{i\varphi})) d\varphi.$$

Für die harmonische Funktion $u(x_1, x_2) := \operatorname{Re}(f(x_1 + ix_2))$ findet man

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1 - \|(x_1, x_2)\|^2}{|x_1 + ix_2 - e^{i\varphi}|^2} \operatorname{Re}(f(e^{i\varphi})) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1 - \|(x_1, x_2)\|^2}{|(x_1, x_2) - (\cos \varphi, \sin \varphi)|^2} u(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Lemma 8.1. Wenn u harmonisch ist auf einer Umgebung von $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, dann gilt für $x = (x_1, x_2) \in B_1(0)$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x-y\|^2} u(y) d\sigma_y. \quad (8.5)$$

Bemerkung 8.1.1. Für $B_r(x_0)$ findet man durch Skalierung und Translation eine ähnliche Formel. Sei u eine harmonische Funktion auf $B_r(x_0)$, so setzt man

$$U(\tilde{x}) := u(x_0 + r\tilde{x}).$$

Dann ist U harmonisch auf $B_1(0)$ und man bekommt via $x = x_0 + r\tilde{x}$, und der Substitution $y = x_0 + r\tilde{y}$, dass

$$\begin{aligned} u(x_0 + r\tilde{x}) &= U(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|\tilde{y}\|=1} \frac{1 - \|\tilde{x}\|^2}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|^2} U(\tilde{y}) d\sigma_{\tilde{y}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\|\tilde{y}\|=1} \frac{1 - \|\tilde{x}\|^2}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|^2} u(x_0 + r\tilde{y}) d\sigma_{\tilde{y}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\|x_0 + r\tilde{y} - x_0\|=r} \frac{1 - \|\tilde{x}\|^2}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|^2} u(x_0 + r\tilde{y}) d\sigma_{\tilde{y}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\|y-x_0\|=r} \frac{1 - \|r^{-1}(x-x_0)\|^2}{\|r^{-1}(x-y)\|^2} u(y) r^{-1} d\sigma_y \end{aligned}$$

und nachdem man dies noch vereinfacht, findet man

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\|y-x_0\|=r} \frac{r^2 - \|x-x_0\|^2}{\|x-y\|^2} u(y) d\sigma_y. \quad (8.6)$$

Beweis. Man darf annehmen, dass die Umgebung $U \supset B_1(0)$ einfach zusammenhängend ist. Dann gibt es $f : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und mit $u = \operatorname{Re} f$ auf U . Weiter geht man voran wie oben und verwendet (8.4) und die folgende Schreibweise für das Integral über den Kreis:

$$\int_{\|y\|=1} g(y) \, d\sigma_y = \int_0^{2\pi} g(\cos \varphi, \sin \varphi) \, d\varphi.$$

□

Beispiel 8.2. Man suche eine explizite Funktion als Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u(x_1, x_2) = x_1 x_2^3 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Statt die Formel in (8.5) direkt zu benutzen, kann man versuchen direkt die holomorphe Funktion zu finden. Schreibe $z = x_1 + ix_2$. Dann gilt für $z = e^{i\varphi}$, also $|z| = 1$, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} 1 &= 1 \\ \operatorname{Re} z &= \operatorname{Re}(e^{i\varphi}) = \cos \varphi = x_1 \\ \operatorname{Re}(z^2) &= \operatorname{Re}(e^{2i\varphi}) = \cos 2\varphi = 2(\cos \varphi)^2 - 1 = 2x_1^2 - 1 \\ \operatorname{Re}(z^3) &= \operatorname{Re}(e^{3i\varphi}) = \cos 3\varphi = 4(\cos \varphi)^3 - 3\cos \varphi = 4x_1^3 - 3x_1 \end{aligned}$$

und man sieht, dass man jedes Polynom in x_1 vom Grad n als Realteil eines anderen Polynoms in z vom gleichen Grad finden kann. Ähnliches gilt für Polynome in x_2 und sogar für Polynome in (x_1, x_2) läuft so etwas. Siehe auch Tabelle 7.1.

Für $(x_1, x_2) \in \partial B_1(0)$ hat man

$$\begin{aligned} x_1 x_2^3 &= \cos \varphi (\sin \varphi)^3 = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^3 = \\ &= -\frac{1}{16} i e^{-4i\varphi} + \frac{1}{8} i e^{-2i\varphi} - \frac{1}{8} i e^{2i\varphi} + \frac{1}{16} i e^{4i\varphi} = \\ &= -\frac{1}{8} \left(\frac{e^{4i\varphi} - e^{-4i\varphi}}{2i} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}}{2i} \right) = \\ &= -\frac{1}{8} \sin(4\varphi) + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) = \operatorname{Re} \left(\frac{i}{8} e^{4i\varphi} - \frac{i}{4} e^{2i\varphi} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{i}{8} z^4 - \frac{i}{4} z^2 \right). \end{aligned}$$

Für $x \in B_1(0)$ findet man:

$$u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \left(\frac{i}{8} z^4 - \frac{i}{4} z^2 \right) = -\frac{1}{2} x_1^3 x_2 + \frac{1}{2} x_1 x_2^3 + \frac{1}{2} x_1 x_2.$$

Kontrolle liefert:

$$\begin{aligned} \Delta u(x_1, x_2) &= -3x_1 x_2 + 3x_1 x_2 = 0 && \text{für } (x_1, x_2) \in B_1(0), \\ u(\cos \varphi, \sin \varphi) &= -\frac{1}{2} (\cos \varphi)^3 \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi (\sin \varphi)^3 + \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \varphi (1 - (\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2) = \cos \varphi (\sin \varphi)^3. \end{aligned}$$

8.2 Folgen der Holomorphie

Im letzten Kapitel sahen wir, dass der Realteil einer holomorphen Funktion harmonisch ist, und dass es zu jeder harmonischen Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet in \mathbb{R}^2 eine holomorphe Funktion gibt, deren Realteil genau diese harmonische Funktion ist. Die Bedingung des einfachen Zusammenhangs ist notwendig, denn wenn das Gebiet nicht einfach zusammenhängend ist, gibt es harmonische Funktionen, die nicht der Realteil einer holomorphen Funktion sind, wie man am Beispiel 7.12 für $u(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$ sieht. Diese Funktion ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definiert und harmonisch. Für $x+iy \notin (-\infty, 0]$ gilt

$$\ln(x^2 + y^2) = 2 \operatorname{Re}(\operatorname{Log}(x + iy)).$$

Weil die dazugehörige holomorphe Funktion eindeutig ist bis auf eine imaginäre Konstante und weil der Logarithmus einen Schnitt von ∞ zu 0 in seinem Definitionsgebiet hat, kann man keine holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ finden.

Lemma 8.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Wenn $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, dann gilt die erste **Mittelwerteigenschaft**:

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\|y-x_0\|=r} u(y) d\sigma_y, \quad (8.7)$$

und auch die zweite **Mittelwerteigenschaft**:

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\|y-x_0\|\leq r} u(y) dy. \quad (8.8)$$

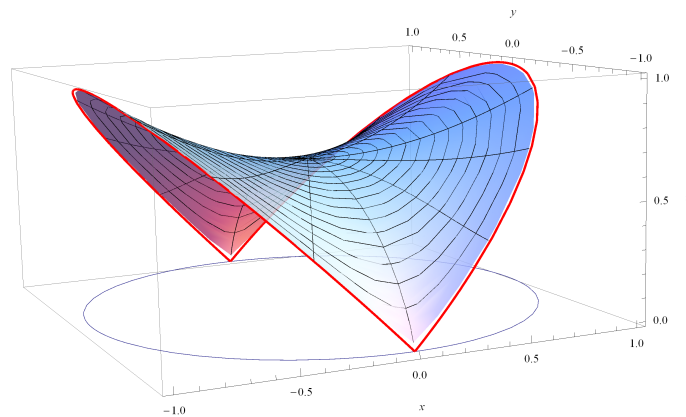


Abbildung 8.1: Die Skizze einer harmonischen Funktion auf $B_1(0)$, die auf dem Rand $u(x_1, x_2) = |x_1|$ erfüllt. Mit Lemma 8.3 kann man $u(0)$ berechnen.

Bemerkung 8.3.1. Für das erste Integral parametrisiert man den Kreis durch $y = y(t) := (r \cos t, r \sin t)$ und findet

$$\begin{aligned} \int_{\|y-x_0\|=r} u(y) d\sigma_y &= \int_{t=0}^{2\pi} u(x_0 + r(\cos t, \sin t)) |y'(t)| dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} u(x_0 + r(\cos t, \sin t)) r dt. \end{aligned}$$

Weil $\int_{\|y-x_0\|=r} 1 d\sigma_y = 2\pi r$ gilt, kann man (8.7) auch schreiben als

$$u(x_0) = \frac{\int_{\|y-x_0\|=r} u(y) d\sigma_y}{\int_{\|y-x_0\|=r} 1 d\sigma_y}$$

und dies erklärt auch den Namen. In der Mitte des Kreises nimmt u den Durchschnittswert von u auf dem Rand des Kreises an.

Bemerkt man, dass $\int_{\|y-x_0\|\leq r} 1 d\sigma_y = \pi r^2$ gilt, dann versteht man auch (8.8) leichter.

Beweis. Man verwende die Cauchy-Formel für harmonische Funktionen (8.5) verschoben nach der Kreisscheibe um x_0 und skaliert mit r . Das ist die Formel in (8.6). Setzt man $x = x_0$ so gilt für $y \in \partial B_r(x_0)$, dass

$$\frac{r^2 - \|(x - x_0)\|^2}{\|x - y\|^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

und (8.7) folgt.

Das zweite Ergebnis folgt aus dem Ersten, weil

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\|y-x_0\|\leq r} u(y) dy &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{s=0}^r \int_{\|y-x_0\|=s} u(y) d\sigma_y ds \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{s=0}^r 2\pi s u(x_0) ds = u(x_0). \end{aligned}$$

□

Theorem 8.4 (Das Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und sei u harmonisch auf Ω .*

- Wenn $x \mapsto u(x)$ ein lokales Maximum hat in $x_0 \in \Omega$, dann ist u konstant.
- Falls Ω beschränkt ist und u stetig auf $\overline{\Omega}$ ist, nimmt u das Maximum an auf $\partial\Omega$.

Beweis. Man verwende die Mittelwerteigenschaft. Wenn u ein Maximum in $x_0 \in \Omega$ hat, dann gilt $u(x) = u(x_0)$ für alle $x \in B_r(x_0)$, jedenfalls wenn $B_r(x_0) \subset \Omega$. Dieses Argument kann man nun wiederholen für jedes $\tilde{x} \in B_r(x_0)$ statt x_0 . Es folgt so, dass $u(x) = u(\tilde{x}) = u(x_0)$ für alle $x \in B_{\tilde{r}}(\tilde{x}) \subset \Omega$. Weil Ω ein Gebiet ist, ist Ω zusammenhängend und offen. Der Zusammenhang liefert für jedes $x \in \Omega$ eine Kurve von x_0 nach x , die innerhalb von Ω liegt. Man überdeckt diese Kurve mit endlich vielen (Kompaktheit) offenen Kreisscheiben innerhalb Ω , hüpf von Kreisscheibe zu Kreisscheibe und findet nach endlichem Hüpfen, dass $u(x) = u(x_0)$. □

Bemerkung 8.4.1. Wenn man dieses Theorem anwendet auf $-u$ kann man Maximum durch Minimum ersetzen.

Wir bekamen sogar eine Integralformel, um eine Harmonische Funktion auf der Kreisscheibe zu finden, wenn nur die Randdaten bekannt sind. Lemma 8.1 kann man sogar noch etwas erweitern:

Proposition 8.5. *Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u_{Rand} : \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Das Randwertproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u = u_{Rand} & \text{auf } \partial B_1(0), \end{cases} \quad (8.9)$$

hat eine eindeutige Lösung $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)})$ und

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2} u_{Rand}(y) d\sigma_y. \quad (8.10)$$

Diese Formel ist bekannt als die **Integralformel von Poisson**.

Bemerkung 8.5.1. Die Formel in (8.6) gibt die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_r(x_0), \\ u = u_{\text{Rand}} & \text{auf } \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

Beweis. Wenn $u_{\text{Rand}} = 0$, dann ist $u = 0$ eine Lösung. Die Eindeutigkeit folgt aus Theorem 8.4. Denn für jede Lösung u liegt das Maximum von sowohl u als auch $-u$ auf dem Rand und dies zeigt, dass nur $u = 0$ eine Lösung ist.

Wir dürfen also annehmen, dass $u_{\text{Rand}} \neq 0$. Außerdem sei bemerkt, dass eine stetige Funktion auf $\partial B_1(0)$ gleichmäßig stetig und gleichmäßig beschränkt ist, weil $\partial B_1(0)$ kompakt ist.

Der Beweis geht in vier Schritten.

1. $u \in C^2(B_1(0))$ und u ist harmonisch:

Die Herleitung der Poissonschen Formel zeigt, dass

$$\begin{aligned} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2} &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{(y_1 + iy_2) - (x_1 + ix_2)} - \frac{1}{(y_1 + iy_2) - \frac{1}{x_1 - ix_2}} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \frac{1}{(y_1 + iy_2) - (x_1 + ix_2)} + \operatorname{Im} \frac{1}{(y_1 - iy_2) - \frac{1}{x_1 + ix_2}} = \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{(y_1 + iy_2) - (x_1 + ix_2)} - \frac{x_1 + ix_2}{1 - (y_1 - iy_2)(x_1 + ix_2)} \right) \end{aligned}$$

und weil rechts der Imaginärteil einer holomorphen Funktion von $x_1 + ix_2$ auf $B_1(0)_{\mathbb{C}}$ steht, ist

$$x \mapsto \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2}$$

harmonisch. Für $\|x\| < 1 - \delta$ darf man Integral und Ableitung vertauschen, und es folgt

$$\Delta u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} \left(\Delta_x \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2} \right) u_{\text{Rand}}(y) d\sigma_y = 0.$$

2. *Radiale Stetigkeit:*

Gemeint ist hier, dass $u(t \cos \varphi, t \sin \varphi) \rightarrow u_{\text{Rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi)$ für $t \uparrow 1$. Aus Symmetriegründen reicht es, wenn wir dies für einen festen Winkel φ zeigen. Wir nehmen $\varphi = 0$ und haben dann zu zeigen, dass

$$u(t, 0) \rightarrow u_{\text{Rand}}(1, 0) \text{ für } t \uparrow 1. \quad (8.11)$$

Weil

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2} d\sigma_y = 1$$

folgt

$$u(t, 0) - u_{\text{Rand}}(1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} \frac{1 - t^2}{\|(t, 0) - y\|^2} (u_{\text{Rand}}(y) - u_{\text{Rand}}(1, 0)) d\sigma_y.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Weil u_{Rand} stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\|y\| = 1 \ \& \ \|y - (1, 0)\| < \delta \implies |u_{\text{Rand}}(y) - u_{\text{Rand}}(1, 0)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (8.12)$$

Auch hat man für $\|y\| = 1$ und $t \in [\frac{1}{4}, 1]$, dass¹ $\|(t, 0) - y\| > \frac{1}{2} \|(1, 0) - y\|$. Es folgt, dass

$$\|y\| = 1 \ \& \ \|y - (1, 0)\| \geq \delta \implies \frac{1 - t^2}{\|(t, 0) - y\|^2} < \frac{(1+t)(1-t)}{(\frac{1}{2}\delta)^2} \leq \frac{8}{\delta^2} (1-t). \quad (8.13)$$

Setze

$$A := \{y \in \partial B_1(0); \|y - (1, 0)\| < \delta\} \text{ und } B := \{y \in \partial B_1(0); \|y - (1, 0)\| \geq \delta\}.$$

Sei $M = \max\{|u_{\text{Rand}}(y)|; \|y\| = 1\}$. Nehmen wir

$$|1 - t| < \frac{\delta^2}{32M}\varepsilon, \quad (8.14)$$

dann folgt mit (8.12) auf A und (8.13) auf B , dass

$$\begin{aligned} |u(t, 0) - u_r(1, 0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} \frac{1-t^2}{\|(t, 0) - y\|^2} |u_{\text{Rand}}(y) - u_{\text{Rand}}(1, 0)| d\sigma_y = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_A + \int_B \right) \frac{1-t^2}{\|(t, 0) - y\|^2} |u_{\text{Rand}}(y) - u_{\text{Rand}}(1, 0)| d\sigma_y \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{1-t^2}{\|(t, 0) - y\|^2} \frac{1}{2}\varepsilon d\sigma_y + \frac{1}{2\pi} \int_B \left(\frac{8}{\delta^2} (1-t) \right) 2M d\sigma_y \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} \frac{1-t^2}{\|(t, 0) - y\|^2} \frac{1}{2}\varepsilon d\sigma_y + \frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} \left(\frac{8}{\delta^2} (1-t) \right) 2M d\sigma_y \leq \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2\pi} \frac{8}{\delta^2} \frac{\delta^2}{32M}\varepsilon 2M \int_{\|y\|=1} 1 d\sigma_y = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Die letzte Abschätzung verwendet (8.14). Die Abschätzung in (8.15) zeigt (8.11). Man findet sogar für alle $\varepsilon > 0$, dass es $\delta > 0$ gibt derart, dass

$$|1 - t| < \delta \implies |u(t \cos \varphi, t \sin \varphi) - u_r(\cos \varphi, \sin \varphi)| < \varepsilon. \quad (8.16)$$

3. Die Stetigkeit am Rand:

Für $x \in B_1(0)$ und $y \in \partial B_1(0)$ gilt folgendes:

$$|u(x) - u_{\text{Rand}}(y)| \leq |u(x) - u_{\text{Rand}}(x/\|x\|)| + |u_{\text{Rand}}(x/\|x\|) - u_{\text{Rand}}(y)|.$$

Kombiniert man (8.16) und die Stetigkeit von u_{Rand} , so folgt dann für $\|y\| = 1$, dass

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ \|x\| < 1}} u(x) = u_{\text{Rand}}(y).$$

¹Setzt man $y = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ folgt

$$\begin{aligned} \|(t, 0) - y\|^2 - \frac{1}{4} \|(1, 0) - y\|^2 &= (t^2 - 2t \cos \varphi + 1) - \frac{1}{4} (2 - 2 \cos \varphi) = \\ &= t^2 - (2t - \frac{1}{2}) \cos \varphi + \frac{1}{2} \geq t^2 - (2t - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = (t - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

4. Die Eindeutigkeit:

Dies folgt aus dem Maximum-Prinzip. Wenn es zwei Lösungen geben würde, die auf dem Rand identisch sind, dann ist die Differenz dieser zwei Lösungen harmonisch in $B_1(0)$ mit 0 als Randwert. Wegen des Maximum-Prinzips ist diese Differenz identisch 0.

Mit diesen 4 Schritten ist der Beweis komplett. \square

Theorem 8.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet. Eine stetige Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist harmonisch genau dann, wenn u für jede Kreisscheibe $B_r(x)$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ die erste Mittelwerteigenschaft erfüllt.

Beweis. Es ist schon gezeigt worden, dass harmonische Funktionen die Mittelwerteigenschaft haben.

Für die andere Richtung sei u eine stetige Funktion, die auf jeder Kreisscheibe die Mittelwerteigenschaft hat. Sei $B_R(x_0) \subset \Omega$. Wir setzen

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\|y-x_0\|=R} \frac{R^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x - y\|^2} u(y) d\sigma_y.$$

Dann hat \bar{u} , weil sie harmonisch ist, und u die Mittelwerteigenschaft auf jedem Kreis in $B_R(x_0)$. Dann hat auch $u - \bar{u}$ auf jedem Kreis in $B_R(x_0)$ die Mittelwerteigenschaft. Das bedeutet, dass $u - \bar{u}$ kein Minimum oder Maximum innerhalb $B_R(x_0)$ hat, es sei denn, $u - \bar{u}$ ist konstant. Weil $u = \bar{u}$ auf $\partial B_R(x_0)$, gilt

$$0 = \min(u - \bar{u}) \leq u(x) - \bar{u}(x) \leq \max(u - \bar{u}) = 0,$$

das heißt u und \bar{u} sind identisch auf $B_R(x_0)$. Weil \bar{u} harmonisch in $B_R(x_0)$ ist, ist auch \bar{u} harmonisch auf $B_r(x)$. Weil das Argument für jeden Kreis zutrifft, ist u harmonisch auf Ω . \square

8.3 Subharmonische Funktionen

Definition 8.7. Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^2 . Eine zweimal differenzierbare Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **subharmonisch** auf Ω , wenn

$$-\Delta u \leq 0.$$

Theorem 8.8. Eine subharmonische Funktion auf $B_R(0)$, die stetig ist auf $\overline{B_R(0)}$, erfüllt die Submittelwerteigenschaften:

$$u(0) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{\|y\|=R} u(y) d\sigma_y \quad \text{und} \quad u(0) \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{\|y\|\leq R} u(y) dy.$$

Beweis. Sei \bar{u} die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} = 0 & \text{in } B_R(0), \\ \bar{u} = u & \text{auf } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Wir betrachten $w = u - \bar{u}$. Wenn wir zeigen können, dass $w(0) \leq 0$, dann folgt

$$u(0) = w(0) + \bar{u}(0) \leq \bar{u}(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\|y\|=R} \bar{u}(y) d\sigma_y = \frac{1}{2\pi R} \int_{\|y\|=R} u(y) d\sigma_y$$

und die erste Behauptung ist bewiesen.

Wenn $w(0) > 0$, dann betrachten wir

$$w_\varepsilon(x) = w(x) - \frac{1}{2}w(0)(1 - \|x\|^2).$$

Weil $w_\varepsilon(0) = \frac{1}{2}w(0) > 0$ und $w_\varepsilon(x) = 0$ für $x \in \partial B_1(0)$, hat w_ε ein positives Maximum innerhalb von $B_1(0)$, sage in x^* . Weil w_ε in x^* ein Maximum hat, gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 w_\varepsilon(x^*) \leq 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 w_\varepsilon(x^*) \leq 0.$$

Dann folgt, weil u subharmonisch ist und \bar{u} harmonisch, dass

$$0 \leq -\Delta w_\varepsilon(x^*) = -\Delta u(x^*) + \Delta \bar{u}(x^*) - 2w(0) \leq 0 + 0 - 2w(0) < 0,$$

ein Widerspruch.

Die zweite Submittelwertegenschaft folgt aus der ersten „SMWE“ genau so wie die zweite Mittelwertegenschaft aus der ersten „MWE“ folgt. \square

Bemerkung 8.8.1. Übrigens gibt es eine Definition von subharmonisch für Funktionen, die nicht unbedingt zweimal differenzierbar sind. Diese Definition verwendet genau diese Submittelwertegenschaft.

8.4 Positive harmonische Funktionen

Theorem 8.9 (Die Harnacksche Ungleichung auf einer Kreisscheibe). *Sei u eine positive harmonische Funktion auf $B_R(0)$. Sei $r < R$. Dann gilt*

$$\frac{R-r}{R+r}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R+r}{R-r}u(0) \text{ für } x \in \overline{B_r(0)}.$$

Bemerkung 8.9.1. Sei $x_{\min} \in \overline{B_r(0)}$ die Stelle in $\overline{B_r(0)}$, wo die Funktion u ihr Minimum annimmt und $x_{\max} \in \overline{B_r(0)}$ die Stelle, wo u ihr Maximum annimmt. Es folgt, dass

$$u(x_{\max}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(0) \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2 u(x_{\min}).$$

Zum Beispiel gilt für $r = \frac{1}{2}R$, dass

$$u(x_{\max}) \leq 9 u(x_{\min}). \quad (8.17)$$

Beweis. Die Formel von Poisson liefert:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\|y\|=R} \frac{R^2 - \|x\|^2}{\|x-y\|^2} u(y) d\sigma_y.$$

Für $\|y\| = R$ und $\|x\| = r < R$ liefert die Dreiecksungleichung, dass

$$0 < R - r = \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \leq \|y\| + \|x\| = R + r,$$

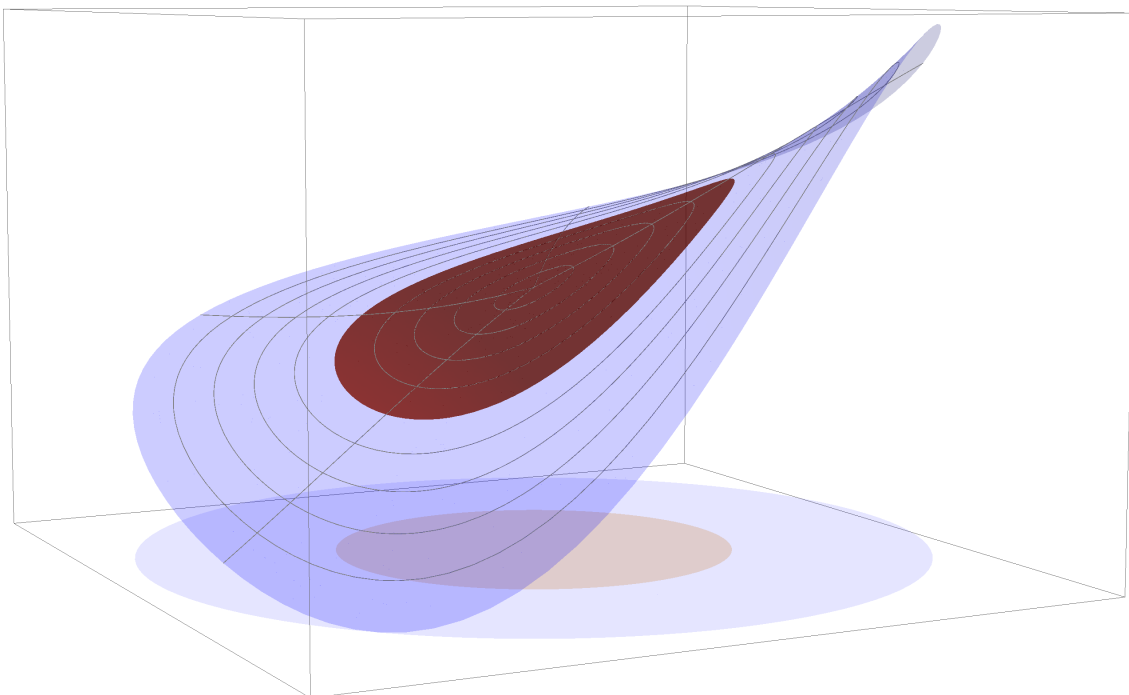


Abbildung 8.2: Skizze einer positiven harmonischen Funktion u auf dem Einheitskreis. Auf dem Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ gilt $u(x_{\max}) \leq 9u(x_{\min})$.

und wir finden

$$\frac{R^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2} \leq \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2} = \frac{(R - r)(R + r)}{(R - r)^2} = \frac{R + r}{R - r},$$

$$\frac{R^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2} \geq \frac{R^2 - r^2}{(R + r)^2} = \frac{(R - r)(R + r)}{(R + r)^2} = \frac{R - r}{R + r}.$$

Weil u positiv ist, folgt mit der Mittelwerteigenschaft und $\|x\| = r$, dass

$$u(x) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_{\|y\|=R} \frac{R + r}{R - r} u(y) d\sigma_y = \frac{R + r}{R - r} u(0),$$

$$u(x) \geq \frac{1}{2\pi R} \int_{\|y\|=R} \frac{R - r}{R + r} u(y) d\sigma_y = \frac{R - r}{R + r} u(0).$$

□

Theorem 8.10 (Die Harnacksche Ungleichung auf allgemeinen Gebieten). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und sei $K \subset \Omega$ kompakt und zusammenhängend. Dann gibt es $c_{\Omega, K} \in \mathbb{R}^+$ derart, dass für jede positive harmonische Funktion u auf Ω gilt:

$$\max_{x \in K} u(x) \leq c_{\Omega, K} \min_{x \in K} u(x).$$

Bemerkung 8.10.1. Die Schärfe dieser Aussage liegt darin, dass die Konstante unabhängig ist von u : für jede positive harmonische Funktion gilt diese Abschätzung mit gleicher Konstante.

Beweis. Weil Ω offen ist, gibt es zu jedem $x \in K$ ein $r_x > 0$ mit $B_{r_x}(x) \subset \Omega$. Dann ist $\{B_{r_x}(x)\}_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K , und weil K kompakt ist, hat man endlich viele, die K überdecken, sagen wir $\{B_{r_i}(x^{(i)})\}_{i=1}^m$. Setze

$$r^* = \min(r_1, \dots, r_m).$$

Als nächstes können wir endlich viele Kreise aus $\{B_{r^*/3}(x)\}_{x \in K}$ wählen, die K überdecken, sagen wir $\{B_{r^*/3}(\tilde{x}^{(i)})\}_{i=1}^{\tilde{m}}$.

Nennen wir x_{\min} und x_{\max} die Stellen in K , wo die Funktion u ihr Minimum und ihr Maximum annimmt. Weil $A := \bigcup_{i=1}^{\tilde{m}} B_{\frac{1}{3}r^*}(\tilde{x}^{(i)})$ offen und zusammenhängend ist, gibt es einen Polygonzug innerhalb von A , der x_{\min} und x_{\max} verbindet.

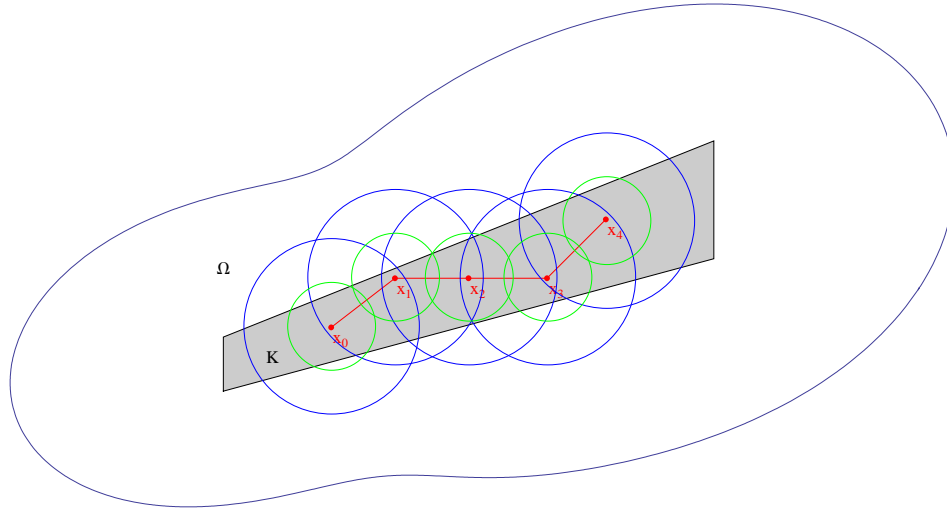


Abbildung 8.3: Skizze zum Beweis der Harnackschen Ungleichung.

Diese Konstruktion ist so gemacht, dass der Polygonzug mindestens $\frac{2}{3}r^*$ von $\partial\Omega$ entfernt bleibt. Man wähle $x^{(0)} = x_{\max}$, $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} := x_{\min}$ entlang des Polygons mit $\|x^{(i)} - x^{(i+1)}\| \leq \frac{2}{3}r^*$. Es gilt

$$B_{\frac{2}{3}r^*}(x^{(i)}) \subset \Omega$$

und mit der Harnackschen Ungleichung für die Kugel folgt

$$u(x_{\max}) = u(x^{(0)}) \leq 3u\left(\frac{1}{2}x^{(0)} + \frac{1}{2}x^{(1)}\right).$$

Ebenso kann man zeigen, dass

$$u\left(\frac{1}{2}x^{(0)} + \frac{1}{2}x^{(1)}\right) \leq 3u(x^{(1)}) \leq 9u\left(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}\right)$$

usw. Es folgt

$$u(x_{\max}) \leq 9u(x^{(1)}) \leq 9^2u(x^{(2)}) \leq \dots \leq 3^{2m}u(x_{\min}).$$

Die Ungleichung ist erfüllt für $c_{\Omega, K} = 3^{2M}$, wobei M die Zahl der Scheiben mit Radius $\frac{1}{3}r^*$ ist, die man braucht, um K zu überdecken. \square

Funktionentheorie, Woche 9

$f(z)$

Potentialströmungen

9.1 Ein Modell zu Potentialströmungen

Strömungsprobleme lassen sich oft beschreiben mit Hilfe eines Potentials. Das heißt, das Vektorfeld \vec{v} , das die Strömungsrichtung und Strömungsgeschwindigkeit beschreibt, ist der Gradient einer skalaren Funktion F . Diese Funktion F nennt man das **Potential**:

$$\vec{v} = -\nabla F. \quad (9.1)$$

Das Minuszeichen ist Gewohnheitssache.

Zusätzlich zu einem Potentialfluss hat man oft noch einen Erhaltungssatz. So ein (physikalischer) Satz ist zum Beispiel die Annahme, dass in jedes Volumenelement gleich viel hinein wie heraus fließt. Wenn es sich um ein inkompressibles Fluid handelt, wird der Erhaltungssatz beschrieben durch die mathematische Bedingung

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (9.2)$$

Kombiniert man die beiden physikalischen Gleichungen (9.1) und (9.2), so bekommt man

$$\Delta F = 0.$$

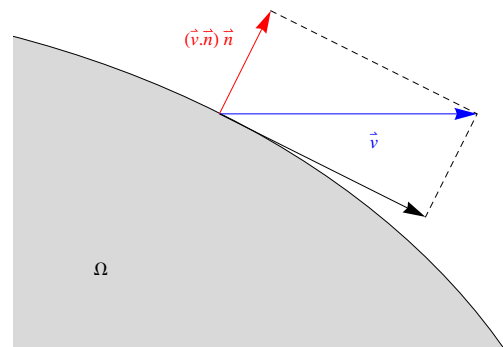
Bemerkung 9.0.2. Diesen Erhaltungssatz kann man sich plausibel machen. Wenn im Teilgebiet Ω gleich viel hinein wie heraus fließt, dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0.$$

Aus dem Satz von Gauß folgt

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} \, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0.$$

Weil dies für jedes Gebiet Ω gilt, folgt $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.



Das Potential F ist hier also eine harmonische Funktion. In zwei Dimensionen bedeutet das, dass wir diese Funktion, jedenfalls lokal, als Realteil einer holomorphen Funktion h schreiben können:

$$F(x, y) = \operatorname{Re} h(x + iy).$$

Das Vektorfeld \vec{v} , das die Richtung und Größe der Strömung angibt, steht senkrecht auf den Äquipotenzialkurven $F(x, y) = c$. Also

$$\vec{v}(x, y) = \nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re} h(x + iy) \\ \partial_y \operatorname{Re} h(x + iy) \end{pmatrix}.$$

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen liefern

$$\begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re} h(x + iy) \\ \partial_y \operatorname{Re} h(x + iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \operatorname{Im} h(x + iy) \\ -\partial_x \operatorname{Im} h(x + iy) \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet

$$\vec{v}(x, y) \cdot \nabla \operatorname{Im} h(x + iy) = 0$$

oder, anders gesagt, das Vektorfeld \vec{v} verläuft parallel zu den Niveaulinien von $\operatorname{Im} h$. Nochmals anders gesagt: die Niveaulinien von $\operatorname{Im} h$ sind die Stromlinien zu der zugehörigen Strömung. Man nennt die holomorphe Funktion h auch das zugehörige **komplexe Potential**.

Beispiel 9.1. Ein Brunnen, der an einem Punkt eine Flüssigkeit in ein homogenes poröses Material bringt, das genügend groß ist, um es als unbeschränkt zu betrachten, sorgt für ein radialsymmetrisches Potential. Um ein derartiges Potential zu finden, müssen wir

$$\Delta u(r) = 0$$

lösen mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(r) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u'(r) \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u'(r) \frac{\partial r}{\partial y} \right) = \\ &= u''(r) \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right) + u'(r) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) = \\ &= u''(r) \left(\left(\frac{x}{r} \right)^2 + \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right) + u'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) = \\ &= u''(r) + \frac{1}{r} u'(r). \end{aligned}$$

Dann folgt aus $u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) = 0$, dass

$$\ln |u'(r)| = c - \ln r.$$

Es folgt $u'(r) = \tilde{c} r^{-1}$ und

$$u(r) = c_1 - c_2 \ln r.$$

Man darf $c_1 = 0$ setzen, weil ∇u unabhängig von c_1 ist. Das Strömungsfeld wird

$$-\nabla u(r) = c_2 \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

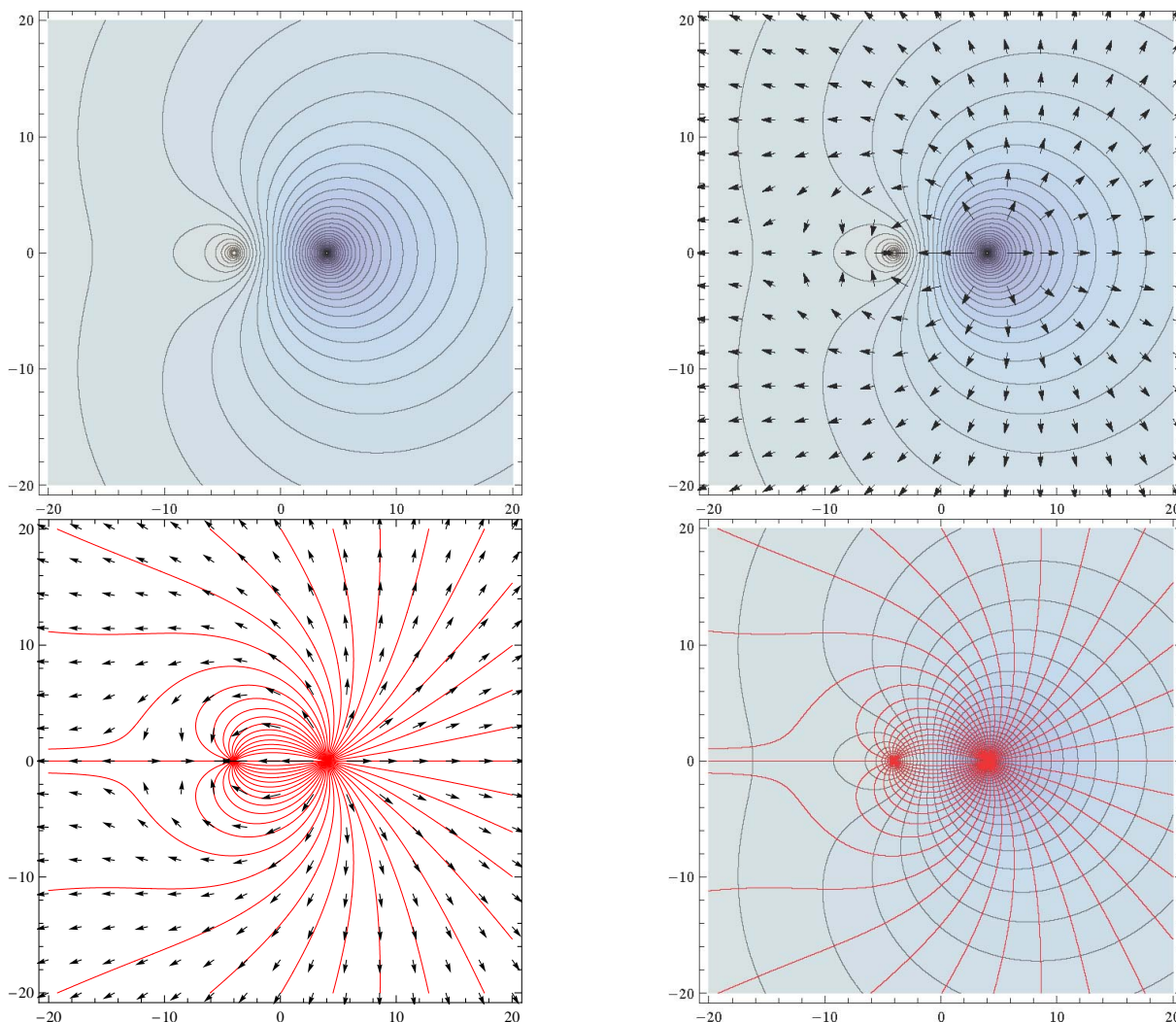


Abbildung 9.1: In $(4, 0)$ wird zweimal soviel Flüssigkeit hineingepumpt, wie in $(-4, 0)$ herausgenommen wird. Von links oben nach rechts unten: Niveaulinien des Potentials, Potential mit Strömungsfeld, Strömungsfeld mit den Niveaulinien vom Imaginärteil des komplexen Potentials, beide Typen von Niveaulinien zusammen.

Aus jedem Gebiet Ω mit $0 \in \Omega$ fließt

$$\begin{aligned}
 M &= - \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n \, d\sigma = - \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(0))} \nabla u \cdot n \, d\sigma - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla u \cdot n \, d\sigma = \\
 &= - \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta u \, dx + \int_{\|(x,y)\|=\varepsilon} c_2 \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} d\sigma = \\
 &= 0 + c_2 \int_{\|(x,y)\|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\sigma = 2\pi c_2.
 \end{aligned}$$

Diese Zahl M ist auch genau die Menge (pro Zeiteinheit), die der Brunnen liefert.

Beispiel 9.2. Das Potential, das zu Abbildung 9.1 gehört, ist (ein Vielfaches von)

$$F(x, y) = \ln((x+4)^2 + y^2) - 2 \ln((x-4)^2 + y^2).$$

Das zugehörige Vektorfeld ist

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \frac{x+4}{(x+4)^2+y^2} - 4 \frac{x-4}{(x-4)^2+y^2} \\ 2 \frac{y}{(x+4)^2+y^2} - 4 \frac{y}{(x-4)^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Weil $F = \operatorname{Re} h$ mit

$$h(z) = 2\operatorname{Log}(z+4) - 4\operatorname{Log}(z-4),$$

folgt

$$\operatorname{Im} h(x+iy) = 2\operatorname{Arg}(z+4) - 4\operatorname{Arg}(z-4) = 2\operatorname{Arg}\left(\frac{z+4}{(z-4)^2}\right).$$

Man sollte bemerken, dass diese Funktion $(x, y) \mapsto \operatorname{Im} h(x+iy)$ nur auf einfach zusammenhängenden Teilgebieten von $\mathbb{R}^2 \setminus \{4, -4\}$ definiert ist. Weil ein Sprung entlang eines Schnitts konstant ist, bringt dies kaum Probleme mit sich für die Stromlinien.

Beispiel 9.3. Ein magnetischer Dipol hat folgendes Potential:

$$D(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Man hat

$$D(x, y) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right),$$

und die Stromlinien sind die Niveaulinien von

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Diese Niveaulinien kann man wie folgt vereinfachen:

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} = c \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2} \text{ für } c \neq 0, \\ y = 0 \text{ für } c = 0. \end{cases}$$

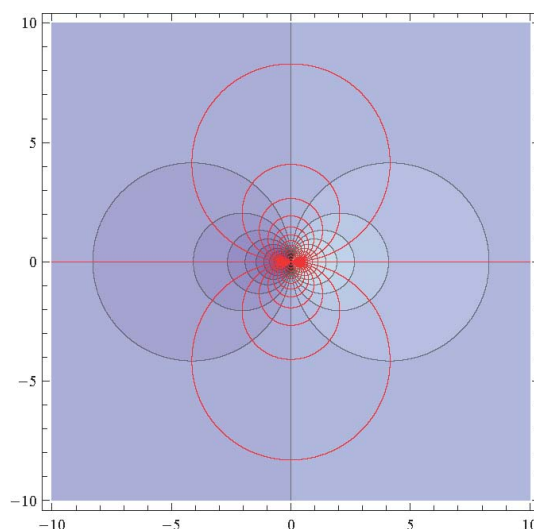


Abbildung 9.2: Ein Dipol.

9.2 Potentialströme mit Randbedingungen

Wenn man eine Potentialströmung in einem Gebiet mit Rand betrachtet, dann kann man vermuten, dass der Rand eine Stromlinie ist. Anders gesagt, für das Potential F gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} F = \nabla F \cdot \vec{n} = 0 \text{ am Rande.}$$

Diese Bedingung heißt **(homogene) Neumann Randbedingung**. „Homogen“, weil die rechte Seite 0 ist; „Neumann“, weil die Normalableitung festgelegt wird.

Beispiel 9.4. Das Potential $F(x, y) = \operatorname{Re} h(x + iy)$ mit

$$h(z) = z + \frac{1}{z}$$

beschreibt eine Strömung außerhalb des Einheitskreises. In Polarkoordinaten:

$$\operatorname{Re} h(re^{i\varphi}) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi,$$

$$\operatorname{Im} h(re^{i\varphi}) = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi.$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} F = \frac{\partial}{\partial r} \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi = \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos \varphi = 0 \text{ für } r = 1.$$

Wenn $\|(x, y)\|$ genügend groß ist, kann man wie folgt vergleichen:

$$F(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} \approx x,$$

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Genauer gesagt:

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow \infty} \left\| \nabla F(x, y) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 0$$

In Worten: Weit entfernt vom Einheitskreis ist es fast ein konstanter Strom.

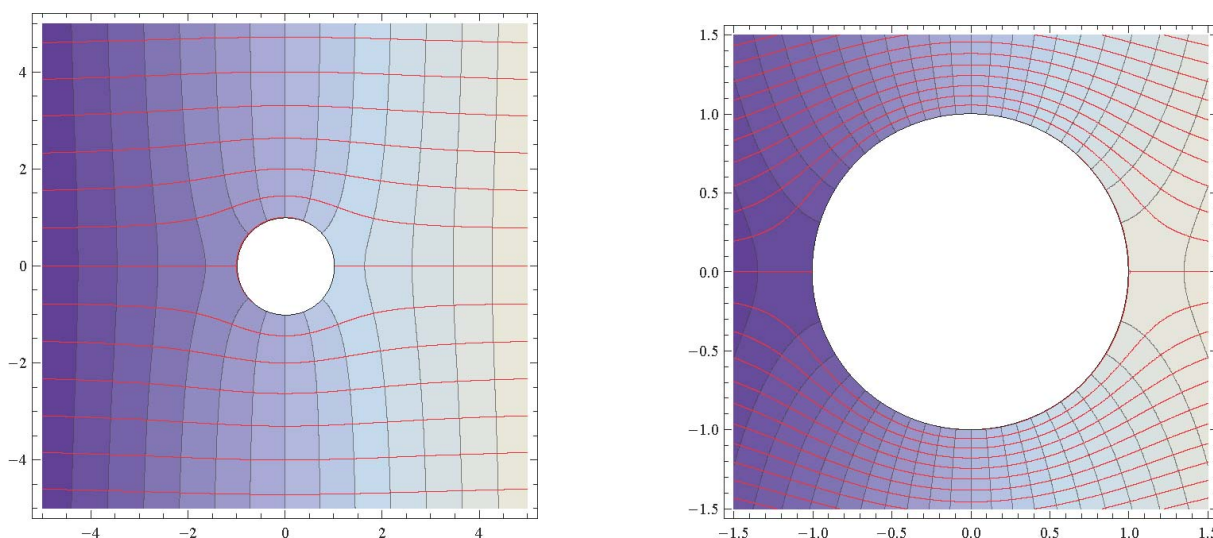


Abbildung 9.3: Strömung um den Einheitskreis mit ‘konstantem’ Vektorfeld in ∞ . Rechts eine Nahaufnahme.

9.3 Beispiele von Potentialströmungen

Die Konstruktion einer Strömung entlang einer Wand oder um ein Hindernis herum ist fast mehr Kunst als Mathematik. Der umgekehrte Weg ist einfacher: Wenn eine holomorphe Funktion gegeben ist, können wir eine Wand in eine Stromlinie legen und finden eine passende Potentialströmung. Ob die tatsächlich auch alle Eigenschaften hat, die man möchte, sollte man dann noch kontrollieren.

Beispiel 9.5. Betrachten wir $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$. Das zugehörige Potential und die Strömungsfunktion sind

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \operatorname{Re}((x + iy)^2) = x^2 - y^2. \\ S(x, y) &= \operatorname{Im}((x + iy)^2) = 2xy. \end{aligned}$$

Die Stromlinien sind definiert durch $2xy = c$. Man findet:

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{und die Hyperbeln } y = \frac{c}{2x}.$$

Nehmen wir $x = 0$ als Wand und betrachten $\Omega = \{(x, y); x > 0\}$, dann sieht es danach aus, als ob wir eine Strömung gefunden hätten, die auf die Wand $x = 0$ zuläuft. Betrachtet man das Strömungsvektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = -\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix},$$

dann folgt, dass die Strömungsgeschwindigkeit unrealistische Größen annimmt.

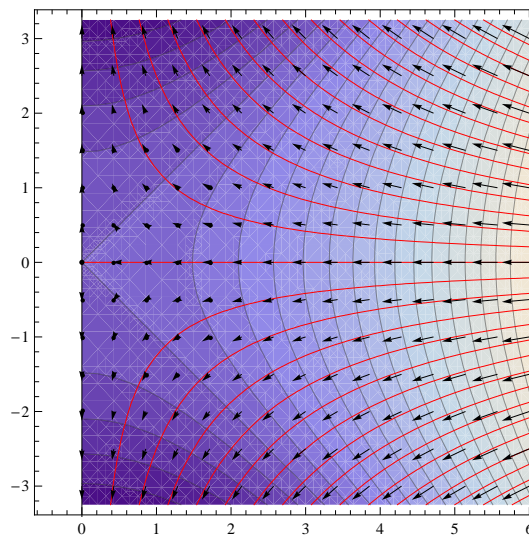


Abbildung 9.4: Strömung bei $z \mapsto z^2$ für $\operatorname{Re} z > 0$.

Beispiel 9.6. Wir können die ‘inverse’ Funktion betrachten: $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)}$. Diese Funktion ist eine holomorphe Erweiterung von $x \mapsto \sqrt{x}$. Wir betrachten das Potential und die Strömungsfunktion bei $if(z)$ und finden

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \operatorname{Re}\left(ie^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(x+iy)}\right) = \dots = \operatorname{sign}(y)\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}x}, \\ S(x, y) &= \operatorname{Im}\left(ie^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(x+iy)}\right) = \dots = -\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

Die Stromlinien sind definiert durch $S(x, y) = c$ und diese Gleichung liefert:

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}x = c.$$

Für $c = 0$ findet man $y = 0$ mit $x \leq 0$. Für $c > 0$ folgt via $x^2 + y^2 = (x - 2c)^2$, dass $y^2 = -4cx + 4c^2$ und

$$x = -\frac{1}{4c}y^2 + c.$$

Diese letzte Gleichung bringt uns ‘liegende’ Parabeln.

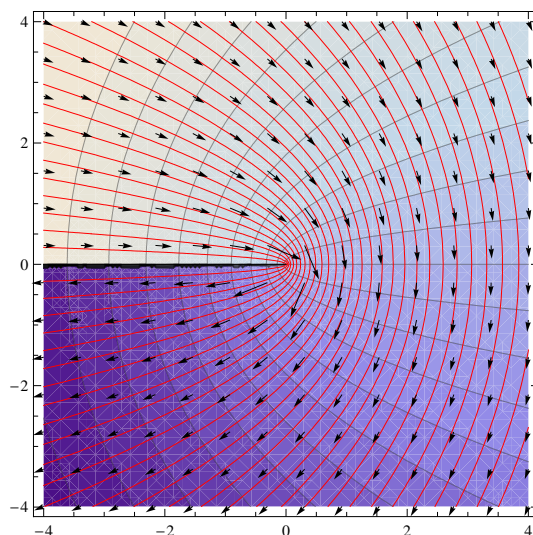


Abbildung 9.5: Strömung bei der erweiterten Quadratwurzel.

9.4 Joukowski

Joukowski (Nikolai Yegorovich Zhukovsky, 1847 – 1921) war einer der Pioniere auf dem Gebiet der Aero- und Hydrodynamik.

Beispiel 9.7. Wir kommen zurück auf $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z + \frac{1}{z}$. Diese Funktion kann man beschreiben als eine ‘two-to-one’ Funktion für fast alle Bildwerte $w = f(z)$: Man kann zeigen, dass

$$f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow \left(z_1 = z_2 \text{ oder } z_1 = \frac{1}{z_2} \right).$$

Nur für $z = 1$ und $z = -1$ hat $f(z)$ nur einem Punkt im Urbild. Wir geben eine Tabelle:

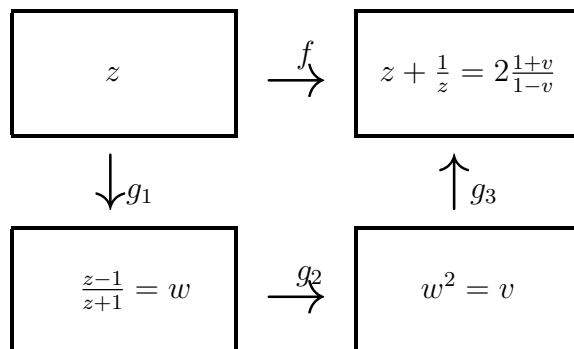
| z | \mapsto | $z + \frac{1}{z}$ |
|-------------------|-----------|-------------------|
| 1 | \mapsto | 2 |
| -1 | \mapsto | -2 |
| i | \mapsto | 0 |
| $-i$ | \mapsto | 0 |
| $\partial B_1(0)$ | \mapsto | $[-2, 2]$ |

Man kann sogar zeigen, dass jeder Kreis, der sowohl 1 als auch -1 enthält, abgebildet wird auf einen Teilkreis, der -2 und 2 verbindet. Dazu verwenden wir, dass

$$f(z) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(z) \tag{9.3}$$

mit

$$g_1(z) = \frac{z-1}{z+1}, \quad g_2(w) = w^2 \quad \text{und} \quad g_3(v) = 2 \frac{1+v}{1-v}.$$

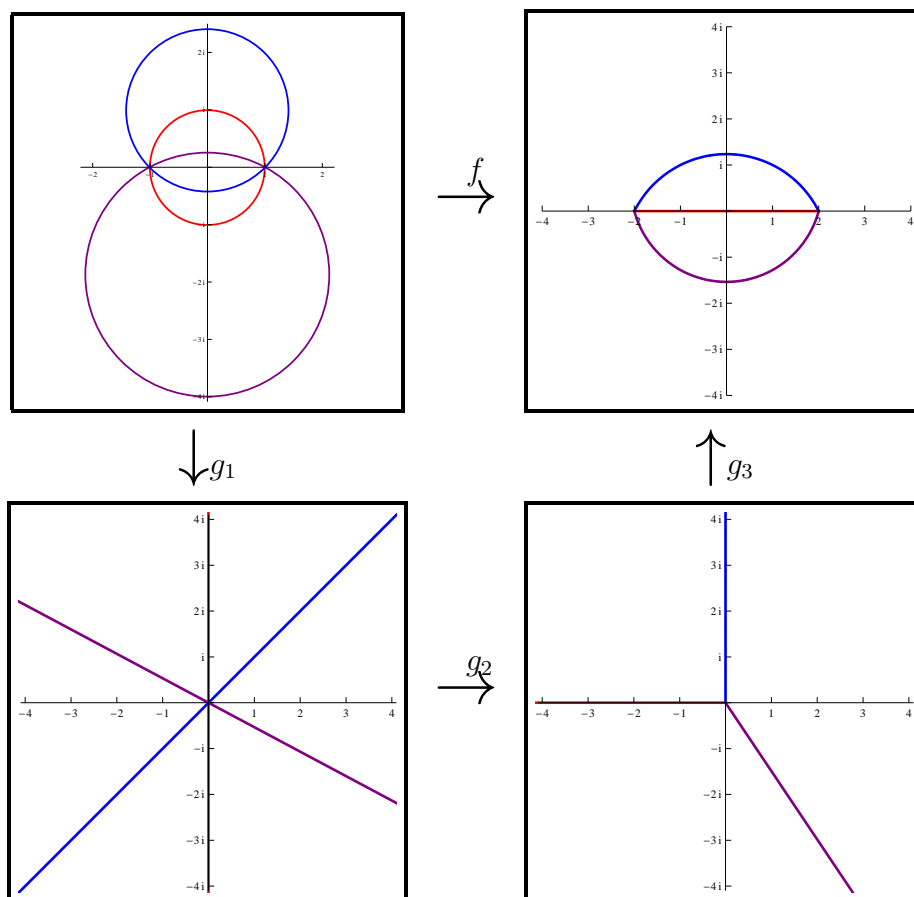


Wir kontrollieren die Behauptung in (9.3):

$$g_3 \circ g_2 \circ g_1(z) = 2 \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2} = 2 \frac{(z+1)^2 + (z-1)^2}{(z+1)^2 - (z-1)^2} = 2 \frac{2z^2 + 2}{4z} = z + \frac{1}{z}.$$

Die Funktionen g_1 und g_3 sind gebrochen-lineare Funktionen (Möbiustransformationen), die 'Kreise und Geraden' abbilden auf 'Kreise und Geraden'.

- Weil $g_1(-1) = \infty$ und $g_1(1) = 0$, wird jeder Kreis durch -1 und 1 abgebildet auf eine Gerade durch 0 .
- Die Funktion g_2 bildet Geraden durch 0 ab auf halbe Geraden, die 0 mit ∞ verbinden.
- Weil $g_3(0) = 2$ und $g_3(\infty) = -2$, wird jede dieser halben Geraden abgebildet auf einen Kreisteil oder ein Intervall, das 2 mit -2 verbindet.



Diese Zusammenstellung von drei holomorphen Abbildungen erlaubt es uns zu folgern, dass für jeden Kreis $\partial B_{\sqrt{1+h^2}}(ih)$ in \mathbb{C} mit $h \in \mathbb{R}$ gilt: Die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \overline{B_{\sqrt{1+h^2}}(ih)} \rightarrow \mathbb{C}$$

ist injektiv. Bemerke, dass $\partial B_{\sqrt{1+h^2}}(ih)$ einen Kreis durch 1 und -1 beschreibt. Den Sonderfall für $h = 0$ haben wir schon betrachtet.

Beispiel 9.8. Die Joukowski-Transformation verwendet einen Kreis durch 1, dessen Mittelpunkt im zweiten Quadranten nicht sehr weit von 0 entfernt ist. Dann liegt -1 innerhalb des Kreises. Das Bild dieses neuen Kreises sieht aus wie der Querschnitt eines Flugzeugflügels. Für kleinere Geschwindigkeiten kann man die Luft um den Flügel als inkompressibles Fluid betrachten und so explizit die Strömung berechnen. Das heißt, man betrachtet die analytische Funktion, die diese Strömung um den neuen Kreis liefert und bildet diese mittels der konformen Abbildung im letzten Beispiel auf das Komplement des Flügeldurchschnitts ab. Der Rand des Flügels wird so eine Stromlinie.

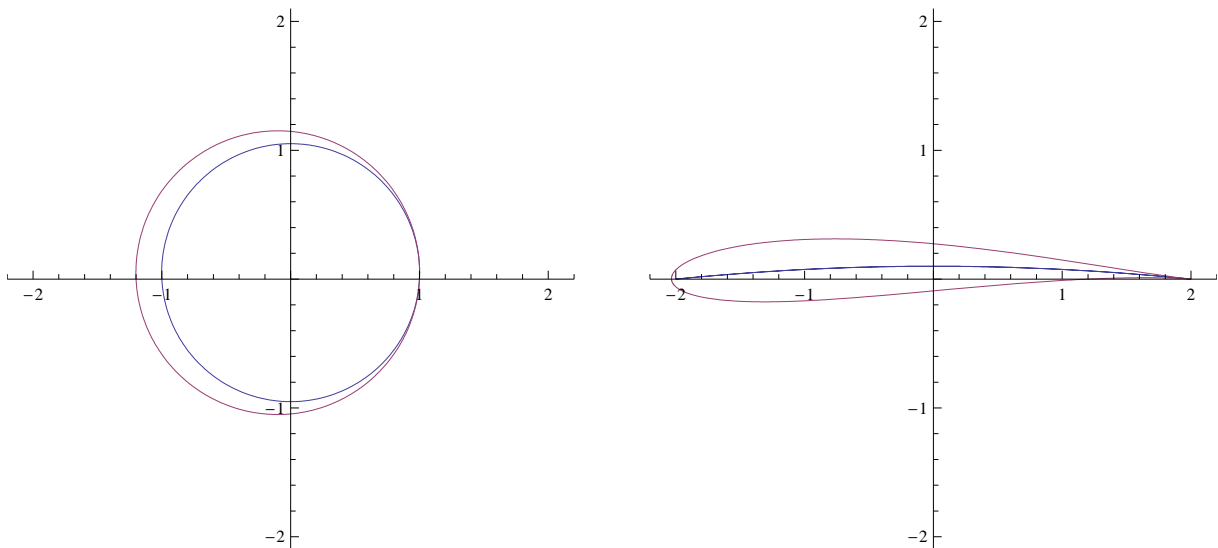


Abbildung 9.6: Zwei Kreise und deren Bilder unter $z \mapsto z + \frac{1}{z}$.

Das komplexe Potential für die Strömung um das Flügelprofil findet man durch

$$h = f \circ T \circ g$$

mit

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, \quad T(z) = az + b \quad \text{und} \quad g(z) = \left(f|_{\mathbb{C} \setminus B_{\sqrt{1+h^2}}(ih)} \right)^{\text{inv}}(z).$$

- Die Funktion g ist die inverse Funktion zu f auf dem Komplement des kleineren Kreises in Abbildung 9.6. Das Urbild vom Komplement des Flügels unter Abbildung g ist das Komplement des größeren Kreises links in Abbildung 9.6.
- Für die Funktion T soll man $a, b \in \mathbb{C}$ so wählen, dass $T(B_1(0))$ genau die Kreisscheibe des größeren Kreises links in Abbildung 9.6 ist.
- Die Kombination $h = f \circ T \circ g$ bildet $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ holomorph ab auf das Komplement des Flügels.

Diese Zusammensetzung liefert aber noch nicht das passende Modell. Statt f benutzt man

$$f_\alpha(z) = z + \frac{1}{z} + i\alpha \operatorname{Log}(-z)$$

und muss sich dann überlegen, wie man mit dem Schnitt $(1, \infty)$ umgeht.

Die NASA hat eine Webseite, wo man interaktiv die Parameter bei der Joukowski-Transformation ändern kann und das Ergebnis anschaulich gemacht wird:

<http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/map.html>

Bei größeren Geschwindigkeiten trifft die Annahme, dass Luft ein inkompressibles Fluid ist, nicht zu. Auch die Annahme, dass das Fluid reibungslos an einem Körper entlang fließt, ist nicht mehr angebracht. Sogenannte Wirbel oder Kreisströmungen können auftreten. Das heißt, dass es sich nicht immer um Potentialflüsse handelt. Eine numerische Approximation zu den Stromlinien in so einem Fall wird dargestellt in Abbildung 9.7.

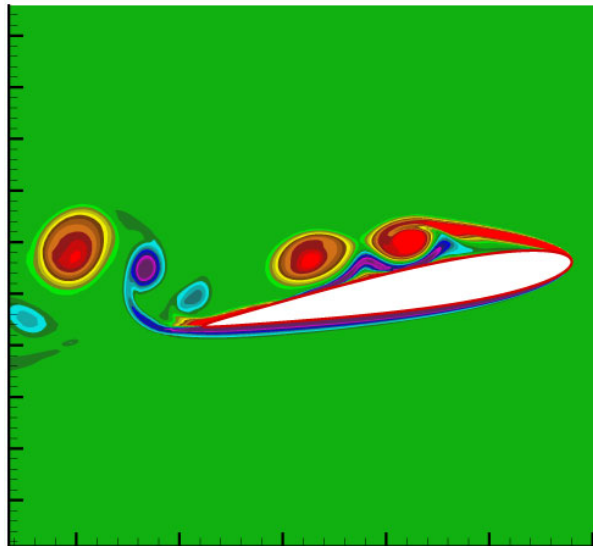


Abbildung 9.7: Aus ‘Control of turbulent incompressible flows around bluff bodies using Large Eddy Simulations’ von Guillaume Fournier, Stéphanie Pellerin & Loc Ta Phuoc. (<http://www.limsi.fr/RS2005/meca/aero/aero11/index.html>)

Biholomorphe Abbildungen

10.1 Konform und biholomorph

Eine konforme Abbildung erhält Winkel und Orientierung. Damit ist folgendes gemeint: Wenn sich zwei Kurven schneiden, dann schneiden sich die Bildkurven mit gleichem Winkel und gleicher Orientierung. Dies bedeutet: Wenn sich die glatten Kurven γ_1 und γ_2 schneiden, sagen wir $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, und h eine konforme Abbildung ist, dann gilt

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{\gamma_1'(t_1)}{\gamma_2'(t_2)} \right) = \operatorname{Arg} \left(\frac{(h \circ \gamma_1)'(t_1)}{(h \circ \gamma_2)'(t_2)} \right).$$

Definition 10.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **konform**, wenn glatte Kurven in U überführt werden in glatte Kurven und wenn diese Abbildung winkel- und orientierungstreu ist.

Bemerkung 10.1.1. In der Literatur ist „konform“ (Englisch: conformal) nicht eindeutig definiert. Manchmal wird zusätzlich die Injektivität der Abbildung verlangt.

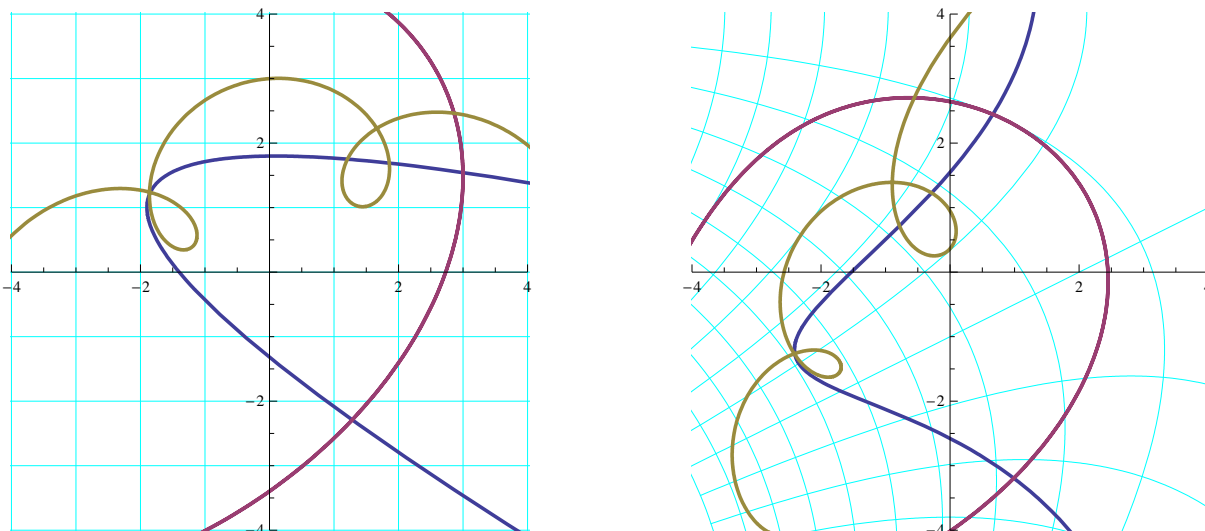


Abbildung 10.1: Einige Kurven und ihre Bilder unter einer konformen Abbildung.

Lemma 10.2. Jede holomorphe Abbildung $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h' \neq 0$ in U ist konform.

Beweis. Wenn $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ und $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow U$ glatte Kurven sind, die sich schneiden, sagen wir $p = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, dann sind Winkel und Orientierung des Schnittwinkels festgelegt durch $\text{Arg}(\gamma_1'(t_1)/\gamma_2'(t_2))$. Für die Bildkurven $h \circ \gamma_1$ und $h \circ \gamma_2$ wird dies $\text{Arg}((h \circ \gamma_1)'(t_1)/(h \circ \gamma_2)'(t_2))$. Weil

$$\frac{(h \circ \gamma_1)'(t_1)}{(h \circ \gamma_2)'(t_2)} = \frac{h'(\gamma_1(t_1))\gamma_1'(t_1)}{h'(\gamma_2(t_2))\gamma_2'(t_2)} = \frac{h'(p)\gamma_1'(t_1)}{h'(p)\gamma_2'(t_2)} = \frac{\gamma_1'(t_1)}{\gamma_2'(t_2)},$$

sind Winkel und Orientierung identisch. Weil für eine glatte Kurve $\gamma' \neq 0$ gilt, ist dieser Quotient wohldefiniert. \square

Definition 10.3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **biholomorph**, wenn $h : U \rightarrow h(U)$ holomorph und bijektiv ist und auch die inverse Funktion $h^{inv} : h(U) \rightarrow U$ holomorph ist.

Wenn h holomorph ist auf U , dann kann man diese Funktion für jedes $w \in U$ als konvergente Potenzreihe schreiben:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - w)^n.$$

Wenn h' in w eine k -fache Nullstelle hat, dann gilt $\alpha_{k+1} \neq 0$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Wenn zwei glatten Kurven γ_1 und γ_2 sich in w schneiden, sagen wir $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = w$, dann folgt mit

$$h(z) - h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z - w)^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_n (z - w)^n,$$

dass man den Winkel zwischen den aus $h(w)$ gehenden Bildkurven $h \circ \gamma_1$ und $h \circ \gamma_2$ findet durch:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Arg} \left(\frac{(h \circ \gamma_1)(t_1 + \varepsilon) - h(w)}{(h \circ \gamma_2)(t_2 + \varepsilon) - h(w)} \right) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Arg} \left(\frac{\sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_n (\gamma_1(t_1 + \varepsilon) - w)^n}{\sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_n (\gamma_2(t_2 + \varepsilon) - w)^n} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Arg} \left(\frac{\alpha_{k+1} (\gamma_1(t_1 + \varepsilon) - w)^{k+1}}{\alpha_{k+1} (\gamma_2(t_2 + \varepsilon) - w)^{k+1}} \right) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Arg} \left(\frac{(\varepsilon \gamma_1'(t_1))^{k+1}}{(\varepsilon \gamma_2'(t_2))^{k+1}} \right) = \\ &= \text{Arg} \left(\left(\frac{\gamma_1'(t_1)}{\gamma_2'(t_2)} \right)^{k+1} \right). \end{aligned}$$

Weil bei einer konformen Abbildung die Argumente identisch sind für alle glatten Kurven, die sich in w schneiden, folgt $k = 0$. Man sieht, dass $h' \neq 0$ notwendig ist für eine konforme Abbildung.

Im Gegensatz zu differenzierbar und $f' \neq 0$ für reelle Funktionen, reicht holomorph und $h' \neq 0$ nicht, um eine bijektive Abbildung zu haben bei komplexen Funktionen. Lokal reicht zwar diese Bedingung (holomorph und $h' \neq 0$), aber am Beispiel $z \mapsto z^2 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sieht man sofort, dass die Bedingung nicht ausreichend ist für eine globale Aussage bezüglich der Bijektivität.

Wir werden in diesem Kapitel die Frage studieren, unter welchen Bedingungen zwei Gebiete sich biholomorph aufeinander abbilden lassen. Einen ersten Schritt liefert das folgende Ergebnis.

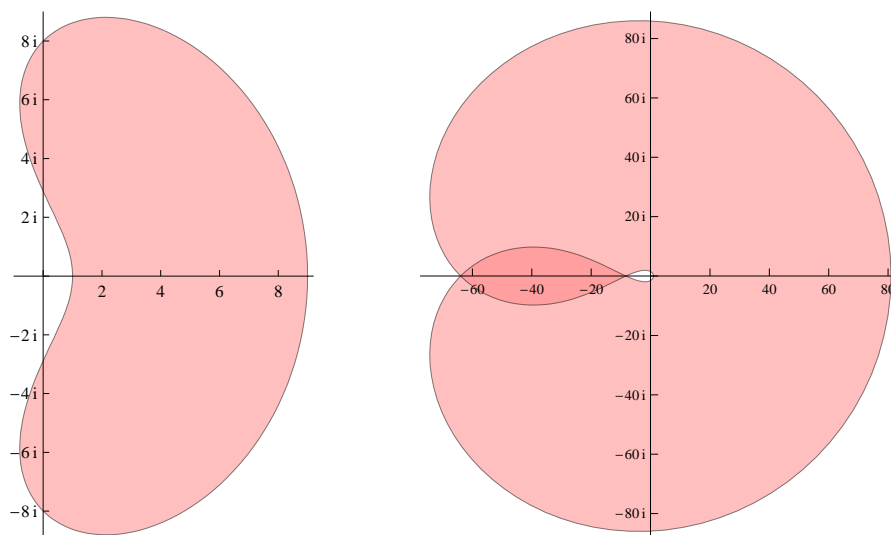


Abbildung 10.2: Ein Gebiet und sein Bild unter $z \mapsto z^2$.

Theorem 10.4 (Gebietstreue). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nichtkonstant. Dann ist $h(G)$ ein Gebiet.

Bemerkung 10.4.1. Ein Gebiet ist eine offene, zusammenhängende Menge.

Bemerkung 10.4.2. Diese Eigenschaft ist nicht gültig für differenzierbare Abbildungen in \mathbb{R}^n . Betrachte zum Beispiel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2, y)$. Siehe Abbildung 10.4.2.

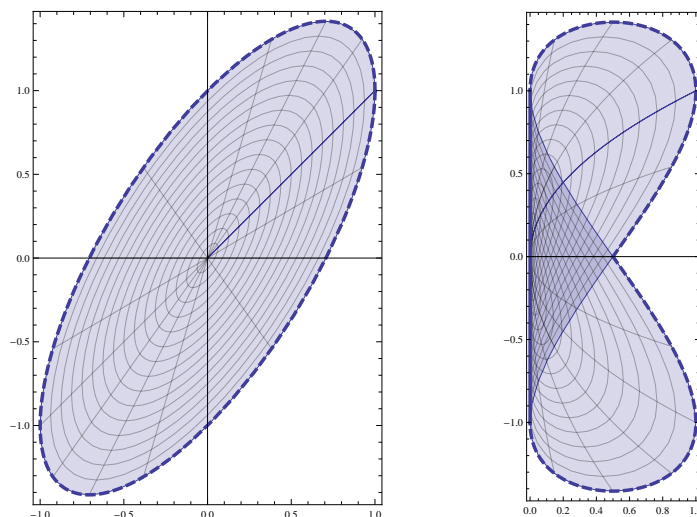


Abbildung 10.3: Rechts das Bild des linken Gebietes unter der Abbildung f aus Bemerkung 10.4.2, die nicht holomorph ist. Das Bild der offenen Ellipse ist nicht offen. Die Abbildung ist nicht gebietstreu.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $h(G)$ offen und zusammenhängend ist. Der Zusammenhang von $h(G)$ folgt direkt: Weil G ein Gebiet ist, gibt es einen Weg γ , der z_1 und z_2 innerhalb G verbindet. Dann werden $h(z_1)$ und $h(z_2)$ durch den Weg $h \circ \gamma$ innerhalb von $h(G)$ verbunden.

Um zu zeigen, dass $h(G)$ offen ist, müssen wir für jedes $w_0 \in h(G)$ ein $\varepsilon > 0$ finden mit $B_\varepsilon(w_0) \subset h(G)$.

Sei $w_0 \in h(G)$. Dann gibt es ein $z_0 \in G$ mit $w_0 = h(z_0)$. Wenn $h'(z_0) \neq 0$ gilt, dann existiert lokal eine inverse Funktion und wären wir schnell fertig. Leider kann man dies nicht annehmen. Weil h jedoch nicht konstant ist, dann gilt wegen des Identitätssatzes Theorem 7.7, dass die Lösungen von $h(z) - w_0 = 0$ keine Häufungspunkte haben. Also gibt es ein $r > 0$ derart, dass es außer z_0 auf $\overline{B_r(z_0)}$ keine Lösungen von $h(z) - w_0 = 0$ gibt. Wir dürfen r so wählen, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset G$. Wir setzen

$$m = \inf \{|h(\tilde{z}) - w_0|; \tilde{z} \in \partial B_r(z_0)\}.$$

Weil $\partial B_r(z_0)$ kompakt ist und h stetig, gilt

$$m = \min \{|h(\tilde{z}) - w_0|; \tilde{z} \in \partial B_r(z_0)\}$$

und es folgt, dass $m > 0$.

Wir behaupten, dass

$$B_{\frac{1}{3}m}(w_0) \subset h(\overline{B_r(z_0)}).$$

Man beweist dies durch einen Widerspruch und nimmt an, es gibt $w_1 \in B_{\frac{1}{3}m}(w_0)$ derart, dass $h(z) = w_1$ keine Lösung in $\overline{B_r(z_0)}$ hat. Dann ist $g : \overline{B_r(z_0)} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \frac{1}{h(z) - w_1}$$

holomorph. Das Maximum-Prinzip, Theorem 6.14, liefert uns, dass für $z \in B_r(z_0)$ folgendes gilt:

$$\left| \frac{1}{h(z) - w_1} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{1}{h(\tilde{z}) - w_1} \right|; \tilde{z} \in \partial B_r(z_0) \right\}.$$

Dann findet man für $z \in \overline{B_r(z_0)}$, dass

$$\begin{aligned} |h(z) - w_1| &\geq \min \{|h(\tilde{z}) - w_1|; \tilde{z} \in \partial B_r(z_0)\} \geq \\ &\geq \min \{|h(\tilde{z}) - w_0|; \tilde{z} \in \partial B_r(z_0)\} - |w_1 - w_0| \geq \\ &\geq m - \frac{1}{3}m = \frac{2}{3}m. \end{aligned}$$

Für $z = z_0$ gilt aber auch

$$|h(z_0) - w_1| = |w_0 - w_1| < \frac{1}{3}m$$

und wir erhalten einen Widerspruch. □

10.2 Kreisscheibe zu Kreisscheibe

Die gebrochen-linearen Abbildungen bilden „Kreise und Geraden“ ab auf „Kreise und Geraden“. Möchte man die Einheitskreisscheibe biholomorph auf sich selber abbilden, dann passen bestimmte gebrochen-lineare Abbildungen:

Lemma 10.5. Sei $z_0 \in B_1(0)$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Dann ist $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ mit

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \tag{10.1}$$

biholomorph von $B_1(0)$ nach $B_1(0)$.

Beweis. Für $|z| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{1 - z_0 \bar{z}} = \frac{|z|^2 - (\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) + |z_0|^2}{1 - (\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) + |z|^2 |z_0|^2} = \\ &= 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{1 - (\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) + |z|^2 |z_0|^2} = 1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} < 1. \end{aligned}$$

Also gilt $f(B_1(0)) \subset B_1(0)$.

Betrachte nun

$$g(z) = e^{-i\varphi} \frac{z - w_0}{1 - \bar{w}_0 z}$$

mit $w_0 = -e^{i\varphi} z_0$. Weil auch $w_0 \in B_1(0)$ gilt, hat g ähnliche Eigenschaften. Es folgt $g(B_1(0)) \subset B_1(0)$.

Man hat weiter, dass $g \circ f(z) = z$. Anders gesagt: $g = f^{inv}$. \square

Lemma 10.6 (Das Schwarz'sche Lemma). *Sei $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ holomorph und sei $f(0) = 0$. Dann gilt:*

1. $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$;
2. Wenn außerdem $f'(0) = 1$ oder $f(z_0) = z_0$ für ein $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$, dann gilt $f(z) = z$.

Beweis. Wir definieren $g : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z & \text{für } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Weil f holomorph ist auf $B_1(0)$ und $f(0) = 0$, gilt $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) z^k$ für $|z| < 1$ und

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) z^{k-1} \text{ für } |z| < 1.$$

Also g ist auch holomorph. Wegen des Maximum-Prinzips gilt für $z \in B_1(0)$ und alle $r \in (|z|, 1)$, dass

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \left| \frac{f(w)}{w} \right| \leq \frac{1}{r}.$$

Weil dies für alle $r \in (|z|, 1)$ gilt, folgt $|g(z)| \leq 1$ und so auch

$$|f(z)| \leq |z| \text{ und } |f'(0)| \leq 1.$$

Für das zweite Ergebnis betrachten wir das Maximum-Prinzip genauer. Man findet:

$$|g(z)| < 1 \text{ in } B_1(0) \text{ oder } g(z) \text{ ist konstant auf } B_1(0).$$

Weil wir annehmen, dass $f'(0) = 1$ (es folgt $g(0) = 1$) oder $f(z_0) = z_0$ (es folgt $g(z_0) = 1$), findet man, dass g konstant gleich 1 ist. Und $g(z) = 1$ impliziert $f(z) = z$. \square

Korollar 10.7. *Die einzigen biholomorphen Abbildungen von $B_1(0)$ nach $B_1(0)$ sind die in (10.1).*

Beweis. Sei $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ biholomorph. Definiere $w = f(0) \in B_1(0)$ und setze

$$h(z) = \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}.$$

Dann ist $h \circ f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ biholomorph und $h \circ f(0) = 0$. Das bedeutet, dass $h \circ f$ und $(h \circ f)^{\text{inv}}$ die Bedingungen des Schwarz'schen Lemmas erfüllen. Es folgt, dass $|(h \circ f)'(0)| \leq 1$ und $\left| \left((h \circ f)^{\text{inv}} \right)'(0) \right| \leq 1$. Dann gilt $|(h \circ f)'(0)| = 1$. Nehmen wir

$$\varphi = -\text{Arg} \left((h \circ f)'(0) \right),$$

dann gilt für $z \mapsto e^{i\varphi} (h \circ f)(z)$, dass $e^{i\varphi} (h \circ f)'(0) = 1$ und das heißt

$$e^{i\varphi} (h \circ f)(z) = z$$

und nach Umformung findet man

$$f(z) = h^{\text{inv}}(e^{-i\varphi} z).$$

Diese Funktion hat eine Form wie in (10.1). □

10.3 Riemannscher Abbildungssatz

Theorem 10.8 (Der Riemannsche Abbildungssatz).

Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $h : \mathbb{R} + i\mathbb{R}^+ \rightarrow G$.

Bevor wir einen Beweis geben können, braucht es noch einiges an Vorbereitung. Den Beweis finden Sie dann auch erst im letzten Kapitel.

Bemerkung 10.8.1. Man kann sogar zeigen, dass diese Abbildung h sich erweitern läßt zu einer stetigen Abbildung auf $\mathbb{R} + i[0, \infty)$.

Bemerkung 10.8.2. Bernhard Riemann hat dieses Ergebnis unter der Bedingung, dass G einen stückweise glatten Rand hat, in seiner Doktorarbeit 1851 formuliert. Sein Beweis dieses Satzes war nicht vollständig. Ein echter Beweis wurde erst sechzig Jahre später gefunden.

Ein relativ eleganter Beweis verwendet Variationsrechnung und braucht einige funktionalanalytische Ergebnisse.

Bemerkung 10.8.3. Für $G = B_1(0)$ kann man zeigen, dass $h : \mathbb{R} + i\mathbb{R}^+ \rightarrow B_1(0)$ mit

$$h(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

so eine biholomorphe Abbildung ist. Wenn man diese Abbildung zusammensetzt mit einer aus Theorem 10.8, dann findet man, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $G \subsetneq \mathbb{C}$ als Bild der Einheitskreisscheibe unter einer biholomorphen Abbildung zu bekommen ist. Also gilt auch, dass sich ein solches Gebiet biholomorph auf die Kreisscheibe abbilden läßt.

Bemerkung 10.8.4. Wenn man zwei biholomorphe Abbildungen h_1, h_2 von $B_1(0)$ auf G hat, dann ist $h_2^{\text{inv}} \circ h_1$ eine biholomorphe Abbildung von $B_1(0)$ auf $B_1(0)$.

10.4 Konstruktion biholomorpher Abbildungen

10.4.1 Von der Halbebene zum Sektor

Wir konstruieren eine biholomorphe Abbildung

$$h : \mathbb{R} + i\mathbb{R}^+ \rightarrow \{z \in \mathbb{C}; \text{Arg}(z) \in (\varphi, \psi)\}$$

mit $-\pi \leq \varphi < \psi \leq \pi$. Dazu verwenden wir:

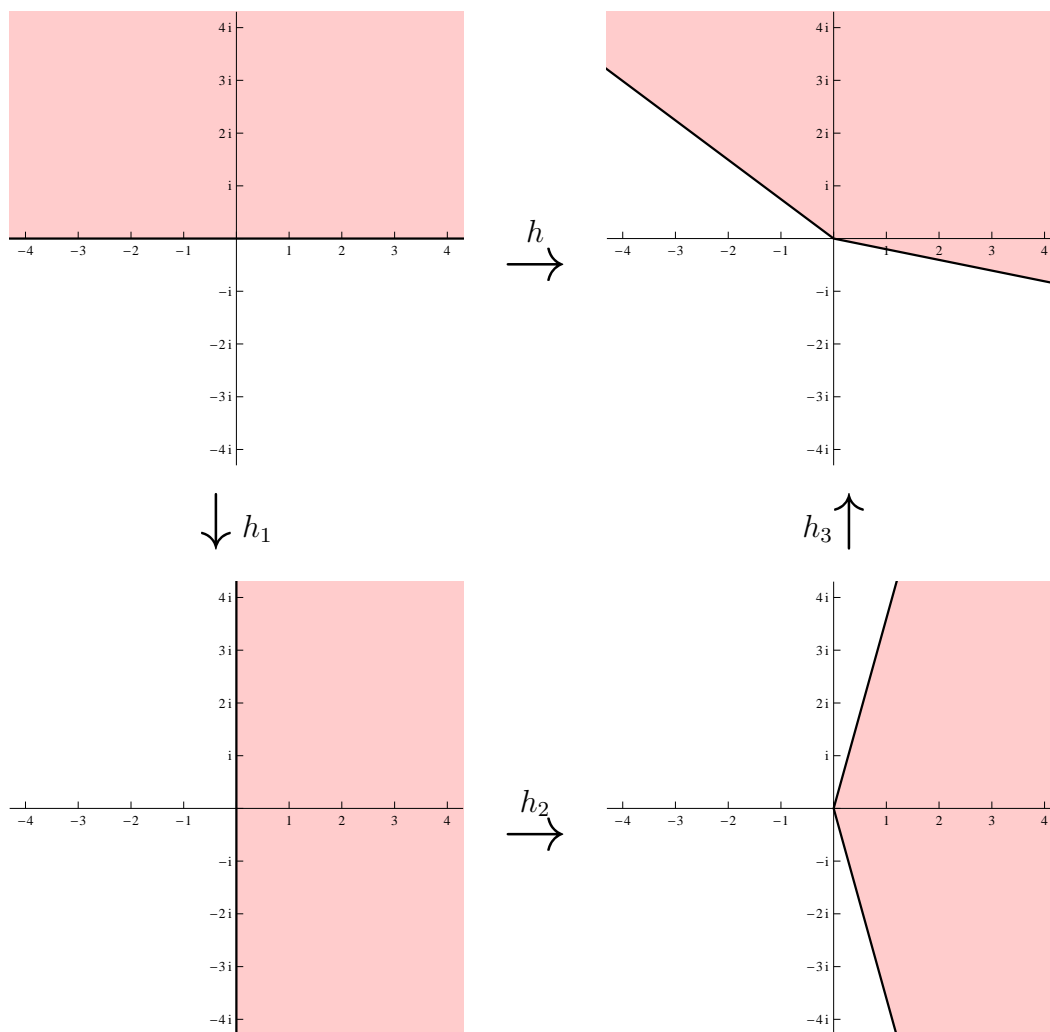
$$h_1 : \mathbb{R} + i\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ + i\mathbb{R}$$

$$\text{mit } h_1(z) = -iz,$$

$$h_2 : \mathbb{R}^+ + i\mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C}; |\text{Arg}(z)| < \frac{\psi - \varphi}{2}\}$$

$$\text{mit } h_2(z) = e^{\frac{\psi - \varphi}{\pi} \text{Log}(z)},$$

$$h_3 : \{z \in \mathbb{C}; |\text{Arg}(z)| < \frac{\psi - \varphi}{2}\} \rightarrow \{z \in \mathbb{C}; \text{Arg}(z) \in (\varphi, \psi)\} \quad \text{mit } h_3(z) = e^{i\frac{\psi + \varphi}{2}} z.$$



Nur bei h_2 muß man vielleicht noch etwas erklären. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $z \mapsto e^{\alpha \text{Log}(z)}$ eine analytische Fortsetzung von $x \mapsto x^\alpha$ auf \mathbb{R}^+ . Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$ folgt

$$|e^{\alpha \text{Log}(z)}| = e^{\alpha \ln|z|} = |z|^\alpha$$

Für $\alpha \in (0, 2]$ und $z \in \mathbb{R}^+ + i\mathbb{R}$ folgt

$$\text{Arg}(e^{\alpha \text{Log}(z)}) = \text{Arg}(e^{\alpha(\ln|z| + i\text{Arg}(z))}) = \text{Arg}(e^{i\alpha \text{Arg}(z)}) = \alpha \text{Arg}(z).$$

Die letzte Identität verwendet, dass aus $\alpha \in (0, 2]$ und $|\text{Arg}(z)| < \frac{1}{2}\pi$ folgt, dass $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$. Genau dieser Fall trifft zu, weil $\frac{\psi - \varphi}{\pi} \in (0, 2]$.

10.4.2 Von der Halbebene zu einem Polygon mit drei Kanten

Seien $\ell_{\pm} \subset \mathbb{C}$ Halbgeraden mit ± 1 als Endpunkt die nicht durch 0 gehen. Wir betrachten $G \subset \mathbb{C}$ mit $\partial G = \ell_- \cup [-1, 1] \cup \ell_+$ und mit $i\varepsilon \in G$ für genügend kleines ε . Die letzte Bedingung legt fest, dass G „oberhalb“ von $[-1, 1]$ liegt.

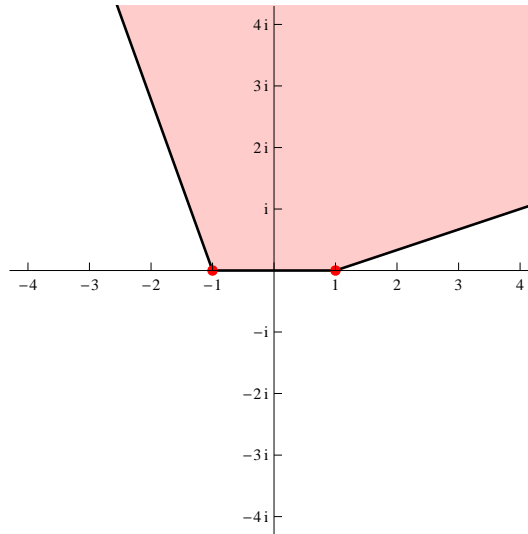


Abbildung 10.4: Gebiet mit drei Teilgeraden als Rand

Betrachte eine Funktion h mit der Ableitung

$$h'(z) = (z+1)^{-\varphi_{-1}/\pi} (z-1)^{-\varphi_{+1}/\pi},$$

wobei

$$w^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}(w)}$$

und

$$\operatorname{Log}(w) = \ln |w| + i \operatorname{Arg}(w) \quad \text{für } \operatorname{Arg}(w) \in (-\pi, \pi].$$

Die Funktion h' ist holomorph auf $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ und hat also eine Stammfunktion h auf $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$. Das heißt, die Annahme, dass es so eine Funktion h gibt ist erlaubt.

Für $z = x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{Arg}\left((x+1)^{-\varphi_{-1}/\pi}\right) = \begin{cases} -\varphi_{-1} & \text{für } x < -1, \\ 0 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

und

$$\operatorname{Arg}\left((x-1)^{-\varphi_{+1}/\pi}\right) = \begin{cases} -\varphi_{+1} & \text{für } x < 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Es folgt, dass

$$\operatorname{Arg}(h'(x)) = \begin{cases} -\varphi_{-1} - \varphi_{+1} & \text{für } x < -1, \\ -\varphi_{+1} & \text{für } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{für } x > 1, \end{cases} \quad (10.2)$$

und

$$h'(x) = \begin{cases} e^{-i(\varphi_{-1} + \varphi_{+1})} |x+1|^{-\frac{\varphi_{-1}}{\pi}} |x-1|^{-\frac{\varphi_{+1}}{\pi}} & \text{für } x < -1, \\ e^{-i\varphi_{+1}} |x+1|^{-\frac{\varphi_{-1}}{\pi}} |x-1|^{-\frac{\varphi_{+1}}{\pi}} & \text{für } x \in (-1, 1), \\ |x+1|^{-\frac{\varphi_{-1}}{\pi}} |x-1|^{-\frac{\varphi_{+1}}{\pi}} & \text{für } x > 1. \end{cases} \quad (10.3)$$

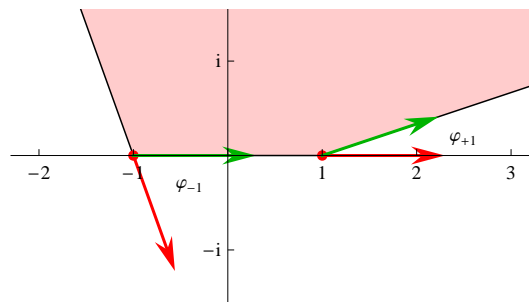


Abbildung 10.5: Die Richtungsänderungen φ_{-1} und φ_{+1} .

Weil $z \mapsto (z+1)^{-\varphi_{-1}/\pi} (z-1)^{-\varphi_{+1}/\pi}$ holomorph ist auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ existiert eine Stammfunktion, zum Beispiel definiert durch

$$h(z) = \int_{[0,z]} (w+1)^{-\varphi_{-1}/\pi} (w-1)^{-\varphi_{+1}/\pi} dw.$$

Diese Funktion h ist sogar holomorph erweiterbar auf $\mathbb{C} \setminus (\{1, -1\} + i(-\infty, 0])$. Wenn $\varphi_{\pm} < \pi$ ist h sogar stetig erweiterbar in $\{-1, 1\}$. Nennen wir auch diese Erweiterung h . Wir finden dann, dass die Kurve $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = t$, die den Rand von $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ parametrisiert, durch h abgebildet wird auf die Kurve $h \circ \gamma$, und für deren Richtung gilt

$$(h \circ \gamma)'(t) = h'(\gamma(t)) \gamma'(t) = h'(t).$$

Weil $\text{Arg}(h'(t))$ durch (10.2) festgelegt wird, ist die Bildkurve die Kombination von 3 Teilgeraden. Wegen $\varphi_{\pm 1} < \pi$ ist h' auf \mathbb{R} integrierbar und wir finden sogar, dass h auf $\mathbb{R} + i[0, \infty)$ stetig ist. Das bedeutet, dass das Bild $h \circ \gamma$ zusammengesetzt ist aus einer Halbgeraden mit Richtung $e^{-i(\varphi_{-1} + \varphi_{+1})}$, die in $z_{-1} = h(-1)$ endet, einem Intervall $[z_{-1}, z_{+1}]$ mit Richtung $e^{-i\varphi_{+1}}$ und einer Halbgeraden mit Richtung 1, die in z_{+1} anfängt. Eine lineare Transformation T , die z_{-1} auf -1 und z_{+1} auf 1 abbildet, vervollständigt den Beweis:

$$T(z) = 1 + \frac{2e^{i\varphi_{+1}}}{|z_{-1} - z_{+1}|} (z - z_{+1}).$$

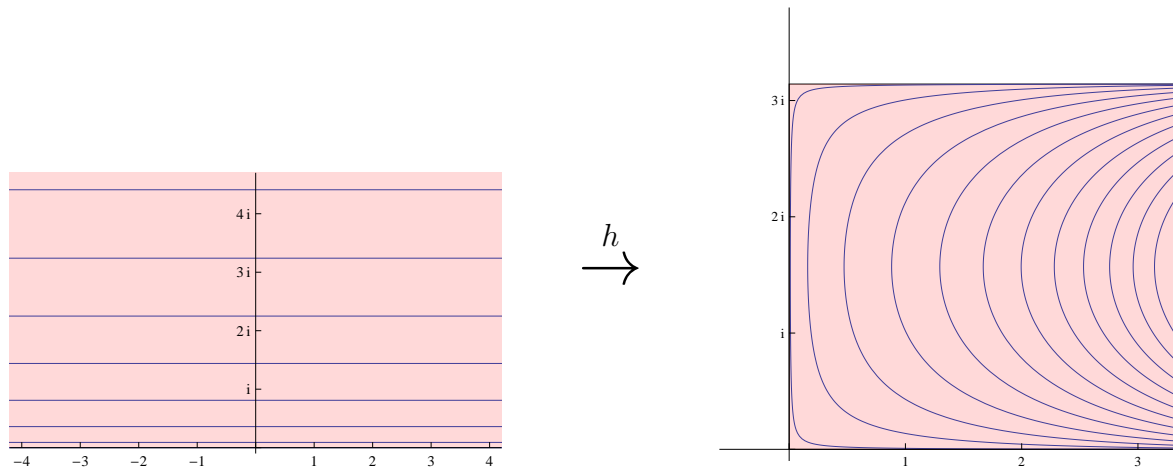
Die von uns gesuchte Funktion ist $T \circ h$. Eine explizite Formel für $T \circ h$ bekommt man im Allgemeinen nur, wenn man die sogenannten hypergeometrischen Funktionen als explizit definiert. Zum Berechnen einer Stammfunktion h braucht man Hilfe von zum Beispiel Mathematica.

Beispiel 10.9. Von der Halbebene zu ein halber Streifen:

In[1]:= **Integrate** [(z + 1) ^ (-1 / 2) (z - 1) ^ (-1 / 2) , z]

Out[1]= 2 ArcSinh $\left[\frac{\sqrt{-1+z}}{\sqrt{2}} \right]$

Ein Bild zu dieser Abbildung h von $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ folgt.

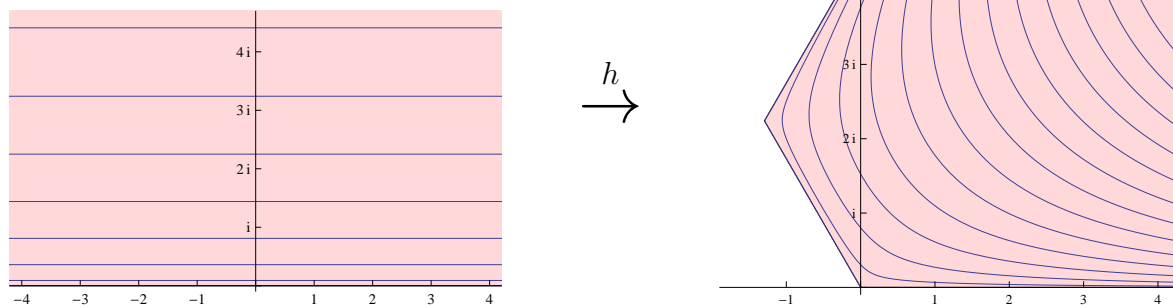


Beispiel 10.10. Von der Halbebene zu einem Polygon mit zwei Winkel der Größe $\frac{2}{3}\pi$:

In[9]:= **Integrate** [(z + 1) ^ (-1 / 3) (z - 1) ^ (-1 / 3) , z]

Out[9]=
$$\frac{3 (-1 + z)^{2/3} \text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1-z}{2}\right]}{2 \times 2^{1/3}}$$

Ein Bild zu dieser Abbildung h von $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ folgt.

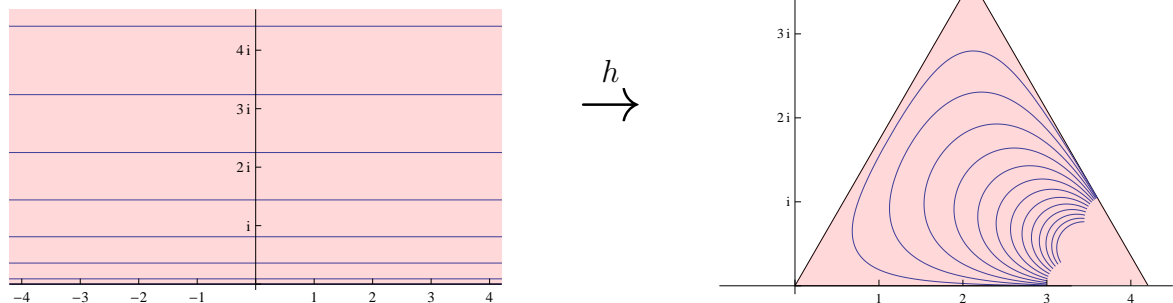


Beispiel 10.11. Von der Halbebene zu einem gleichseitigen Dreieck:

In[59]:= **Integrate** [(z + 1) ^ (-2 / 3) (z - 1) ^ (-2 / 3) , z]

Out[59]=
$$\frac{3 (-1 + z)^{1/3} \text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1-z}{2}\right]}{2^{2/3}}$$

Ein Bild zu dieser Abbildung h von $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ folgt.

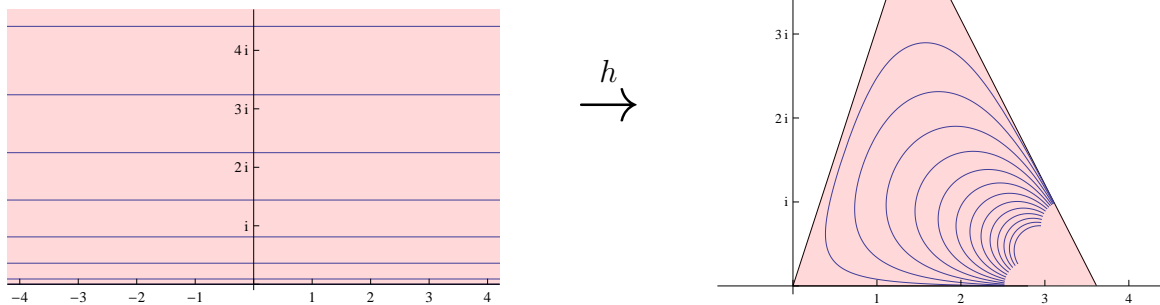


Beispiel 10.12. Von der Halbebene zu einem Dreieck mit Winkel $\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{2}{5}\pi$:

In[56]:= **Integrate** [(z + 1) ^ (-3 / 4) (z - 1) ^ (-3 / 5) , z]

Out[56]=
$$\frac{5 (-1 + z)^{2/5} \text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{1-z}{2}\right]}{2 \times 2^{3/4}}$$

Ein Bild zu dieser Abbildung h von $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ folgt.

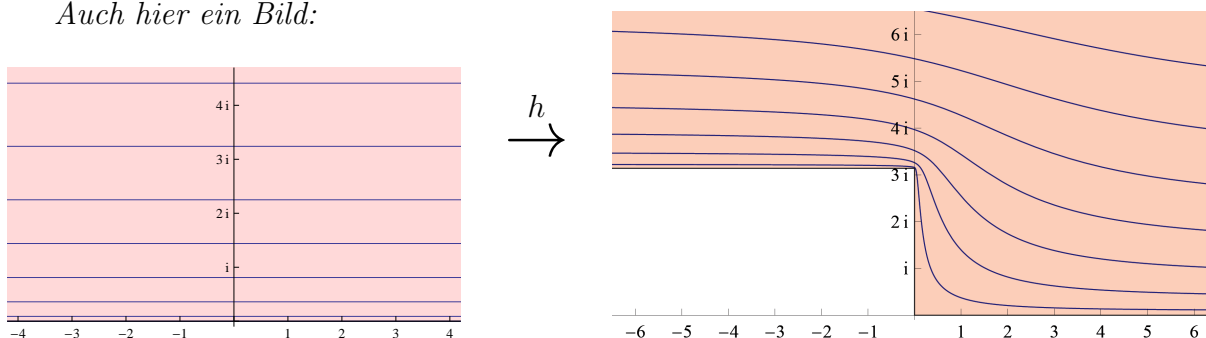


Beispiel 10.13. Von der Halbebene zu $(\mathbb{R} \times i[1, \infty)) \cup (\mathbb{R}^+)^2$:

```
In[90]:= Integrate [(z + 1)^(1/2) (z - 1)^(-1/2), z]
```

$$\text{Out[90]= } \frac{(-1 + z) \sqrt{1 + z} + 2 \sqrt{-1 + z} \text{ArcSinh}\left[\frac{\sqrt{-1+z}}{\sqrt{2}}\right]}{\sqrt{\frac{-1+z}{1+z}} \sqrt{1 + z}}$$

Auch hier ein Bild:



Bemerkung 10.13.1. Wie oben beschrieben kann man durch Verschiebung und Drehskalierung zwei beliebige Eckpunkte bekommen.

Bemerkung 10.13.2. Wie man im 3. und 4. Beispiel gesehen hat, funktioniert diese Konstruktion sogar, wenn $\varphi_{-1} + \varphi_{+1} > \pi$. Dann schneiden sich die beiden Geraden. In diesem Fall wird ∞ auf die dritte Ecke des entstandenen Dreiecks abgebildet.

Bemerkung 10.13.3. Wenn man eine ähnliche Konstruktion ansetzt bei vier Eckpunkten (oder drei echten endlichen und ∞ als viertem), dann bemerkt man spätestens bei der Transformation, dass man das Verhältnis der Längen der Seiten nicht direkt im voraus festlegen kann. Ein Viereck ist, abgesehen von Skalierungen und Verschiebungen, festgelegt durch drei Winkel und das Längenverhältnis zweier benachbarter Seiten.

Bemerkung 10.13.4. Es gibt ein Ergebnis, dass nach Christoffel¹ und Schwarz² benannt ist, das besagt, dass man für jedes Polynom P mit n Ecken eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ auf P findet mittels

$$h(z) = \alpha + \beta \int_{[0,z]} \prod_{k=1}^n (w - z_k)^{-\varphi_k/\pi} dw.$$

¹Elwin Bruno Christoffel (1829 - 1900) war Schüler am Friedrich-Wilhelm Gymnasium in Köln.

²Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921)

10.5 Biholomorph bei mehrfachem Zusammenhang

Die Frage, ob ein Gebiet mit n Löchern sich biholomorph abbilden läßt auf eine Kreisscheibe mit n kreisförmigen Löchern ist auch heute noch aktuell. Schauen Sie sich dazu folgenden Artikel an:

SIAM³ News, Volume 41, Number 1, January/February 2008. Breakthrough in Conformal Mapping by James Case.

<http://www.siam.org/pdf/news/1297.pdf>

³Society for Industrial and Applied Mathematics

Funktionentheorie, Woche 11

$f(z)$

Funktionen und Polstellen

11.1 Meromorphe Funktionen

Definition 11.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine Funktion. Wenn folgendes gilt, nennt man f **meromorph** auf U :

1. $P := f^{-1}(\infty)$ hat keine Häufungspunkte;
2. P besteht nur aus Polstellen von f ;
3. $f : U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.

Beispiel 11.2. Wenn p ein Polynom vom Grad größer gleich 1 ist, ist $q : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$q(z) = \begin{cases} 1/p(z) & \text{für } p(z) \neq 0, \\ \infty & \text{für } p(z) = 0, \end{cases}$$

eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} . Es ist übrigens üblich zu schreiben $q(z) = 1/p(z)$ und ∞ an den nicht-definierten Stellen zu nehmen.

Beispiel 11.3. Die Funktion $z \mapsto \tan(z)$ ist meromorph auf \mathbb{C} . Auch hier nimmt man ∞ , wenn $\cos(z) = 0$. Eine Skizze der Funktionenlandschaft finden sie in Abbildung 11.1.

Beispiel 11.4. Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, definiert durch

$$f(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{z}} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ \infty & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

ist nicht meromorph auf \mathbb{C} . Wenn f einen Pol von Ordnung m in 0 hätte, dann würde $\lim_{z \rightarrow 0} z^m f(z)$ existieren. Für alle $m \in \mathbb{N}^+$ gilt jedoch

$$\lim_{x \downarrow 0} x^m f(x) = \infty.$$

Übrigens, auch wenn man $f(0) = w$ für ein $w \in \mathbb{C}$, statt $f(0) = \infty$, definieren würde, wird f nicht meromorph bei 0.

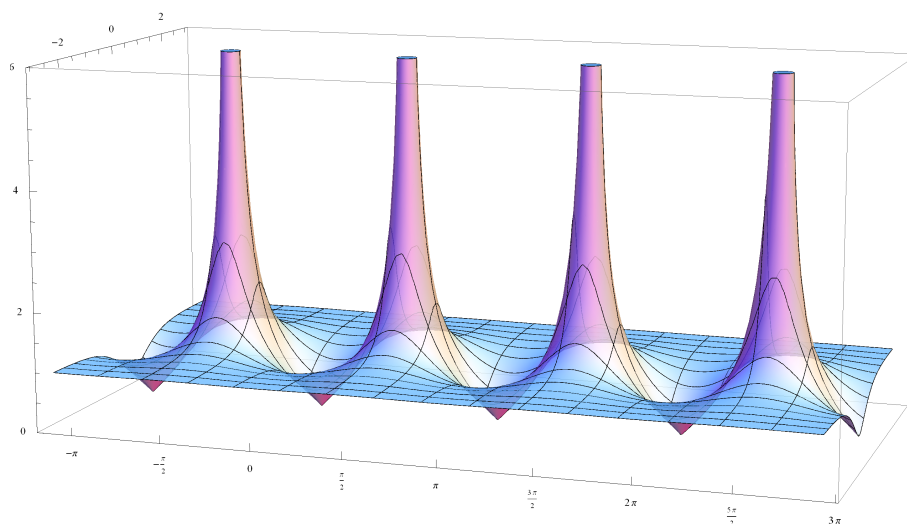


Abbildung 11.1: Die Funktionenlandschaft von $z \mapsto \tan(z)$.

Wenn $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine Nullstelle von Ordnung m hat in $w \in U$ und holomorph ist auf $B_r(w)$ mit $r > 0$, dann hat $z \mapsto 1/f(z)$ eine Polstelle von Ordnung m in w . Wegen des Identitätssatzes (Theorem 7.7) haben die Nullstellen von f keine Häufungspunkte in $B_r(w)$, und es folgt, dass die Polstellen von $1/f$ in $B_r(w)$ keine Häufungspunkte haben.

Lemma 11.5. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen.

1. Wenn $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen sind mit $g \not\equiv 0$, dann ist f/g meromorph auf U .
2. Wenn h meromorph auf U ist, dann gibt es zu jedem $w \in U$ eine Umgebung $B_r(w)$ und zwei holomorphe Funktionen $f, g : B_r(w) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h = f/g$.

Beweis. 1) Wenn die Funktion g holomorph ist und nicht identisch 0, können die Nullstellen keine Häufungspunkte haben, und die Nullstellen sind endlicher Ordnung. Siehe Theorem 7.7. Eine Nullstelle von g mit Ordnung n führt zu einem Pol in f/g (wenn nicht auch f eine Nullstelle hat an der Stelle, wo g eine hat).

2) Sei $w \in U$. Wenn h keinen Pol in w hat, dann ist h holomorph in w und man kann h mit Hilfe einer Potenzreihe f mit positivem Konvergenzradius schreiben. Man setze $g \equiv 1$. Wenn h einen Pol von Ordnung n hat, setzt man $g(z) = (z - w)^n$, und die Funktion $z \mapsto (z - w)^n h(z)$ kann man in w zu einer holomorphen Funktion erweitern. \square

Bemerkung 11.5.1. Wenn man sagt, dass die Funktion $z \mapsto \frac{z^2}{\sin(z)}$ auf \mathbb{C} meromorph ist, dann meint man, dass

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{\sin(z)} & \text{für } z \notin \pi\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{für } z = 0, \\ \infty & \text{für } z \in \pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

meromorph ist. Die Löcher in der Formel für f werden sozusagen „automatisch ausgestopft“. Wenn es eine hebbare Singularität betrifft, setzt man $f(w) = \lim_{z \rightarrow w} f(z)$, und sonst setzt man $f(w) = \infty$.

Korollar 11.6. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und $f \not\equiv 0$. Dann gibt es für jedes $w \in U$ eine Zahl $r \in \mathbb{R}^+$, ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ und eine Folge $\{a_k\}_{k_0 \leq k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ derart, dass $a_{k_0} \neq 0$ und

$$f(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k (z-w)^k \quad \text{für } z \in B_r(w) \setminus \{w\}. \quad (11.1)$$

Das heißt, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-w)^k$ konvergiert auf $B_r(w)$, und

- für $k_0 > 0$ hat f eine Nullstelle von Ordnung k_0 in w ;
- für $k_0 < 0$ hat f eine Polstelle von Ordnung $|k_0| = -k_0$ in w .

Beweis. Wegen Lemma 11.5 gibt es $r_1 > 0$ und holomorphen Funktionen $f_1, f_2 : B_{r_1}(w) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$. Dann ist f_2 auf $B_{r_1}(w)$ als Potenzreihe zu schreiben:

$$f_2(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m (z-w)^m$$

bei der wir m_0 die kleinstmögliche Zahl in \mathbb{N} nehmen derart, dass $b_{m_0} \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{f_2(z)} = \frac{1}{\sum_{m=m_0}^{\infty} b_m (z-w)^m} = \frac{1}{(z-w)^{m_0}} \frac{1}{\sum_{m=m_0}^{\infty} b_m (z-w)^{m-m_0}}.$$

Für die Funktion $g(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m (z-w)^{m-m_0}$ gilt $g(w) \neq 0$ und daher ist $z \mapsto 1/g(z)$ holomorph in einer Umgebung $B_{r_2}(w)$. Es folgt, dass

$$f(z) = \frac{1}{(z-w)^{m_0}} f_1(z) \frac{1}{g(z)}.$$

Weil $z \mapsto f_1(z)/g(z)$ holomorph ist auf $B_r(w)$ mit $r = \min\{r_1, r_2\}$, kann man diese Funktion als Potenzreihe auf $B_r(w)$ schreiben und wenn man dann durch $(z-w)^{m_0}$ dividiert, folgt (11.1). \square

Lemma 11.7. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wenn $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ meromorphe Funktionen sind mit $g \not\equiv 0$, dann sind $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ und f/g meromorphe Funktionen auf U .

Der Beweis ist fast direkt und wird dem Leser überlassen.

Bemerkung 11.7.1. Wenn $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktionen sind, ist $f \circ g : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ im Allgemeinen nicht meromorph (und auch nicht zu ergänzen zu einer meromorphen Funktion). Das Standardbeispiel ist $f(z) = e^z$ und $g(z) = \frac{1}{z}$. Die Funktionen f und g sind meromorph auf \mathbb{C} ; die Funktion $f \circ g$ jedoch nicht.

11.2 Nullstellen, Pole und ein Kurvenintegral

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, und sei Γ das Bild einer linksherum laufenden (differenzierbaren) Jordan-Kurve γ . Nehmen wir an, dass Γ und sein Innengebiet in U liegen.

Sei f meromorph auf U und derart, dass f weder Nullstellen noch Polstellen auf Γ hat. Wir schreiben dann

$$\begin{aligned} \#_N(f, \Gamma) &= \text{die Zahl der Nullstellen von } f \text{ innerhalb von } \Gamma, \\ \#_P(f, \Gamma) &= \text{die Zahl der Polstellen von } f \text{ innerhalb von } \Gamma, \end{aligned}$$

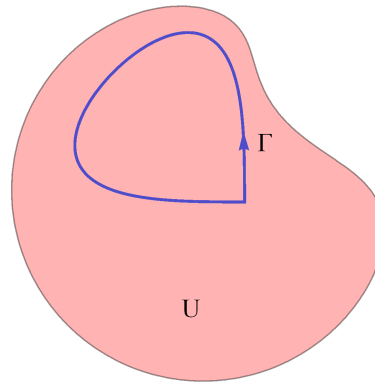


Abbildung 11.2: U , Γ und die Richtung von γ

wobei diese Zahl inklusive Multiplizität gezählt wird. Die Multiplizität einer n -fachen Nullstelle ist n ; die Multiplizität eines Pols von Ordnung m ist m . Im nächsten Beispiel sieht man nochmals wie dies gemeint ist.

Beispiel 11.8. Die Funktion $g(z) = \frac{(z-1)^2(z+i)(z-5)^4 \sin(z)^2}{(z+1)^2 z}$ ist meromorph und man findet

- i) 1 ist eine Nullstelle mit Multiplizität 2;
- ii) $-i$ ist eine Nullstelle mit Multiplizität 1;
- iii) 5 ist eine Nullstelle mit Multiplizität 4;
- iv) 0 ist eine Nullstelle mit Multiplizität 1:

$$\frac{\sin(z)^2}{z} = \frac{\left(z - \frac{1}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^5)\right)^2}{z} = z \left(1 - \frac{1}{3}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\right);$$

- v) -1 ist eine Polstelle mit Multiplizität 2.

Also gilt $\#_N(g, \partial B_2(0)) = 2 + 1 + 1 = 4$ und $\#_P(g, \partial B_2(0)) = 2$. Die Nullstelle 5 liegt außerhalb $\partial B_2(0)$.

Lemma 11.9. Seien f und Γ wie oben und sei γ eine Parametrisierung von Γ . Dann gilt

$$\#_N(f, \Gamma) - \#_P(f, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (11.2)$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{Z}$ und $w \in U$. Lokal hat man $f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k (z-w)^k$ mit $\alpha_m \neq 0$. Wenn $m > 0$, dann ist w eine Nullstelle von f mit Ordnung m . Wenn $m < 0$, dann ist w eine Polstelle von f der Ordnung $-m$. Es gilt für $m \neq 0$, dass

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\sum_{k=m}^{\infty} k \alpha_k (z-w)^{k-1}}{\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k (z-w)^k} = \frac{1}{z-w} h(z),$$

bei dem

$$h(z) = \frac{\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+m) \alpha_{\ell+m} (z-w)^{\ell}}{\sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\ell+m} (z-w)^{\ell}}$$

eine in einer Umgebung von w holomorphe Funktion ist. Weiter gilt

$$h(w) = \frac{m \alpha_m}{\alpha_m} = m.$$

Die Funktion $z \mapsto f'(z)/f(z)$ ist holomorph in einer Umgebung von w , wenn f in w keine Nullstelle und auch keine Polstelle hat. Wenn f in w eine Nullstelle oder Polstelle hat, hat $z \mapsto f'(z)/f(z)$ einen Pol von Ordnung 1 und es folgt

$$\operatorname{Res}_w \left(\frac{f'}{f} \right) = m = \begin{cases} \#_N(f, \partial B_\varepsilon(w)) & \text{für } m > 0, \\ -\#_P(f, \partial B_\varepsilon(w)) & \text{für } m < 0. \end{cases}$$

Der Residuensatz liefert das Ergebnis. □

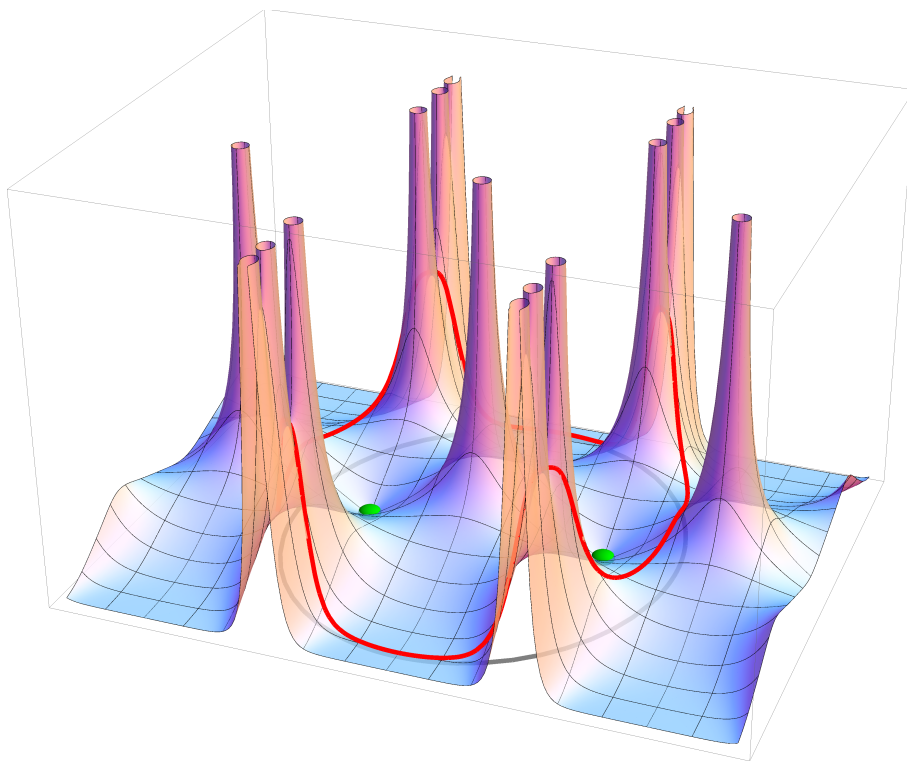


Abbildung 11.3: Das Kurvenintegral in (11.2) zählt Nullstellen minus Polstellen innerhalb der Kurve. Hier ist die Funktionenlandschaft zu $f(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(\sin(z))}$ skizziert. Für die skizzierte Kurve liegen 2 Nullstellen und 5 Polstellen innerhalb, alle mit Multiplizität 1. Man findet $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 - 5 = -3$.

Theorem 11.10 (Rouché). Seien f und g meromorphe Funktionen auf U und seien f und Γ wie oben. Wenn

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \Gamma, \quad (11.3)$$

dann gilt

$$\#_N(f, \Gamma) - \#_P(f, \Gamma) = \#_N(g, \Gamma) - \#_P(g, \Gamma). \quad (11.4)$$

Bemerkung 11.10.1. Wenn f und g holomorph sind, dann findet man

$$\#_N(f, \Gamma) = \#_N(g, \Gamma).$$

Beweis. Betrachte $h(\theta, z) = (1 - \theta)f(z) + \theta g(z)$ für $\theta \in [0, 1]$. Für alle $\theta \in [0, 1]$ ist $z \mapsto h(\theta, z)$ eine meromorphe Funktion. Außerdem gilt

$$|f(z) - h(\theta, z)| = \theta |f(z) - g(z)| \leq |f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \Gamma,$$

und es folgt, dass $h(\theta, z)$ weder eine Nullstelle noch eine Polstelle auf Γ hat. Denn hätte $h(\theta, z)$ eine Nullstelle $w \in \Gamma$, dann liefert

$$|f(w)| = |f(w) - h(\theta, w)| < |f(w)|$$

den Widerspruch. Hätte $h(\theta, z)$ eine Polstelle $w \in \Gamma$, dann findet man einen Widerspruch durch

$$\infty = |f(w) - h(\theta, w)| < |f(w)| < \infty.$$

Also ist die Funktion $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$A(\theta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(\theta, z)}{h(\theta, z)} dz$$

mit $h'(\theta, z) = \frac{\partial}{\partial z} h(\theta, z)$ für jedes $\theta \in [0, 1]$ wohldefiniert. Weil $h'(\theta, z)$ und $h(\theta, z)$ keine Null- oder Polstellen für $z \in \Gamma$ haben, ist $\theta \mapsto A(\theta)$ sogar stetig auf $[0, 1]$. Und weil

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(\theta, z)}{h(\theta, z)} dz = \#_N(h(\theta, \cdot), \Gamma) - \#_P(h(\theta, \cdot), \Gamma)$$

nur ganze Zahlen als Wert annimmt, folgt, dass

$$\theta \mapsto \#_N(h(\theta, \cdot), \Gamma) - \#_P(h(\theta, \cdot), \Gamma)$$

konstant ist. Das besagt genau, dass (11.4) erfüllt ist. \square

11.3 Partialbruchentwicklung

In der Analysis Vorlesung haben Sie gesehen, dass man rationale Funktionen in Partialbrüche zerlegen kann. Eine rationale Funktion ist der Quotient zweier Polynome. Zerlegen in Partialbrüche heißt, dass es für jedes paar Polynome p und q ein Polynom \tilde{p} und komplexe Zahlen $c_{k,\ell}$ gibt derart, dass

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \tilde{p}(z) + \sum_{q(z_k)=0} \sum_{\ell=1}^{\ell_k} \frac{c_{k,\ell}}{(z - z_k)^\ell} \quad (11.5)$$

mit ℓ_k die Multiplizität der Nullstelle z_k von q . Zum Beispiel gilt:

$$\begin{aligned} \frac{z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 3z^2 + 4z - 1}{z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4} &= \frac{z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 3z^2 + 4z - 1}{(z^2 + 1)(z - 2)^2} = \\ &= z + 1 - \frac{\frac{2}{25} - \frac{3}{50}i}{z - i} - \frac{\frac{2}{25} + \frac{3}{50}i}{z + i} + \frac{\frac{104}{25}}{z - 2} + \frac{\frac{19}{5}}{(z - 2)^2}. \end{aligned}$$

Wenn man in (11.5) die Polynome p und q ersetzt durch holomorphe Funktionen, bekommt man meromorphe Funktionen. Kann man bei einer meromorphen Funktion etwas machen mit Partialbruchzerlegung?

Eine meromorphe Funktion h ist holomorph mit möglicher Ausnahme von möglichst unendlich, aber höchstens abzählbar vielen Polstellen z_k . Bei so einer Polstelle kann man h wie folgt schreiben

$$h(z) = \sum_{\ell=-m}^{-1} \alpha_\ell (z - z_k)^\ell + g(z),$$

wobei g eine in einer Umgebung von z_k holomorphe Funktion ist und m ist die Ordnung des Pols. Man nennt

$$\sum_{\ell=-m}^{-1} \alpha_{\ell} (z - z_k)^{\ell} \quad (11.6)$$

den **Hauptteil** von h an der Stelle z_k . Übrigens, da die Parameter $m \in \mathbb{N}^+$ und $\alpha_{\ell} \in \mathbb{C}$ im Allgemeinen für jede Polstelle unterschiedlich sind, müsste man eigentlich m_k und $\alpha_{\ell,k}$ schreiben. Die Polstellen z_k mit den Hauptteilen nennt man die **Hauptteilverteilung** von h :

$$\left\{ \sum_{\ell=-m_k}^{-1} \alpha_{\ell,k} (z - z_k)^{\ell} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

Die zentrale Frage, die wir nun betrachten, ist, ob man zu vorgegebenen Hauptteilen bei Polstellen ohne Häufungspunkte immer eine meromorphe Funktion finden kann, die genau diese Polstellen hat. Wenn $U \subset \mathbb{C}$ beschränkt ist, ist die Frage leicht zu lösen. Für beschränktes U gibt es höchstens endlich viele Polstellen, und man summiert die Hauptteile. Bei unbeschränkten Gebieten, wie zum Beispiel ganz \mathbb{C} , ist die Frage weniger einfach. Wenn man erneut einfach die Hauptteile addiert, kann man nicht garantieren, dass diese Summe konvergiert. Bevor wir uns an eine Konstruktion wagen, die unendlich viele Terme enthalten muss, müssen wir uns also eine Art von Konvergenz überlegen. Eine Schwierigkeit dabei bilden die Polstellen. Wie kann man Konvergenz einer Funktionenfolge definieren, wenn diese Funktionen an einigen Stellen den Wert ∞ haben?

In der folgenden Definition wird verwendet, dass die Polstellen einer meromorphen Funktion keine Häufungspunkte haben und es deshalb nur endlich viele auf einem Kompaktum geben kann. Man kann zum Beispiel die Polstellen nach absoluter Größe anordnen $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots$ und wie folgt versuchen zu summieren:

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=-m_k}^{-1} \alpha_{k,\ell} (z - z_k)^{\ell}. \quad (11.7)$$

Nehmen wir an, dass $|z_n| > R$, dann hätten wir für

$$z \mapsto \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\ell=-m_k}^{-1} \alpha_{k,\ell} (z - z_k)^{\ell}$$

auf $\overline{B_R(0)}$ keine Polstellen und könnten auf $\overline{B_R(0)}$ die gleichmäßige Konvergenz dieser Folge betrachten. Wir werden noch sehen, dass die rechte Seite in (11.7) oft nicht konvergiert, im Grunde jedoch ist diese Idee nicht schlecht. Wenn wir die Hauptteile mit einem geschickten Polynom ergänzen, kann man die Konvergenz erlangen.

Diese Art von Konvergenz wird in der folgenden Definition festgelegt.

Definition 11.11. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $\{f_{\ell} : U \rightarrow \mathbb{C}\}_{\ell=1}^{\infty}$ eine Folge meromorpher Funktionen. Man sagt, dass die Folge $\left\{ \sum_{k=1}^{\ell} f_k \right\}_{\ell=1}^{\infty}$ kompakt konvergiert auf U , wenn es für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ ein ℓ_K gibt, so dass gilt:

- für $\ell \geq \ell_K$ sind die Funktionen f_{ℓ} holomorph auf K ,
- $\left\{ \sum_{m=\ell_K}^{\ell} f_m \right\}_{\ell=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf K .

Bemerkung 11.11.1. Eine Funktionenfolge $\{g_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ konvergiert gleichmäßig auf K , wenn es $g : K \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \ell_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall z \in K : \ell \geq \ell_\varepsilon \Rightarrow |g_\ell(z) - g(z)| < \varepsilon. \quad (11.8)$$

Anders gesagt, wenn

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|g_\ell - g\|_{L^\infty(K)} = 0,$$

wobei $\|g_\ell - g\|_{L^\infty(K)} = \sup \{|g_\ell(z) - g(z)|; z \in K\}$.

Bemerkung 11.11.2. Wenn eine Funktionenfolge gleichmäßig Cauchy ist auf K , dann ist sie auch gleichmäßig konvergent auf K .

Gleichmäßig Cauchy bedeutet, dass für die Funktionenfolge gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \ell_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall z \in K : k, \ell \geq \ell_\varepsilon \Rightarrow |g_\ell(z) - g_k(z)| < \varepsilon. \quad (11.9)$$

In dem Fall kann man \tilde{g} auf K definieren durch $\tilde{g}(z) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} g_\ell(z)$.

Die Folge $\{g_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ konvergiert gleichmäßig gegen \tilde{g} . Das sieht man wie folgt. Sei $\varepsilon > 0$. Man nehme $\ell_{\varepsilon/2}$ wie in (11.9) und $k_z \geq \ell_{\varepsilon/2}$ derart, dass $|g_{k_z}(z) - \tilde{g}(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Für $\ell > \ell_{\varepsilon/2}$ folgt dann, dass

$$|g_\ell(z) - \tilde{g}(z)| \leq |g_\ell(z) - g_{k_z}(z)| + |g_{k_z}(z) - \tilde{g}(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Wenn die g_ℓ in (11.9) stetig sind, dann ist auch \tilde{g} stetig. Auch dies kann man einfach nachvollziehen. Sei $\varepsilon > 0$ und nehme $\ell_{\varepsilon/4}$ in (11.8). Für $k > \ell_{\varepsilon/4}$ folgt

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(w) - \tilde{g}(z)| &\leq |\tilde{g}(w) - g_k(w)| + |g_k(w) - g_k(z)| + |g_k(z) - \tilde{g}(z)| \leq \\ &\leq \frac{1}{4}\varepsilon + |g_k(w) - g_k(z)| + \frac{1}{4}\varepsilon. \end{aligned}$$

Weil g_k stetig ist, gibt es $\delta > 0$ derart, dass $|g_k(w) - g_k(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für $|w - z| < \delta$.

Theorem 11.12 (Mittag-Leffler). Sei $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ eine Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen ohne Häufungspunkt. Wir dürfen annehmen, dass $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$. Sei $m_k \in \mathbb{Z}^-$, $\alpha_{k,\ell} \in \mathbb{C}$ und setze

$$f_k(z) = \sum_{\ell=m_k}^{-1} \alpha_{k,\ell} (z - z_k)^\ell.$$

1. Wenn es ganze Funktionen g_k gibt derart, dass

$$\left\{ \sum_{k=1}^m (f_k - g_k) \right\}_{m \in \mathbb{N}} \quad (11.10)$$

kompakt konvergiert für $m \rightarrow \infty$, dann ist F , definiert durch

$$F(z) := \sum_{k=1}^{\infty} (f_k - g_k)(z),$$

eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} mit der gewünschten Hauptteilverteilung.

2. Nimmt man für g_k das Taylorpolynom zu f_k in 0 mit hinreichend hohem Grad, dann ist (11.10) kompakt konvergent.

Bemerkung 11.12.1. Weil $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ keinen Häufungspunkt hat, kann man nach Größe des Betrags ordnen. Wir haben angenommen, dass $0 < |z_1|$. Das darf man ohne Verlust der Allgemeinheit. Wenn $z_1 = 0$, kann man um $\frac{1}{2}|z_2 - z_1|$ verschieben.

Beweis. 1) Nehmen wir an, dass (11.10) kompakt konvergiert. Es reicht, wenn wir zeigen, dass F auf jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{C}$ die gewünschte Hauptteilverteilung hat. Aus der Annahme folgt, dass es k_K gibt, so dass $\sum_{k=k_K}^\infty (f_k - g_k)$ gleichmäßig konvergiert auf K . Weil die Funktionen f_k holomorph sind auf K , ist auch $\sum_{k=k_K}^\infty (f_k - g_k)$ holomorph auf K .

Die Tatsache, dass eine konvergente Folge von holomorphen Funktionen zu einer holomorphen Funktion konvergiert, folgt mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy. Denn Korollar 5.7 zeigt, dass für h_k holomorph auf $B_R(z_0)$ mit $R > r$ gilt

$$h_k^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{h_k(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Dann folgt, dass wenn h_k gleichmäßig konvergiert auf $B_R(z_0)$, auch $h_k^{(n)}$ konvergiert auf $B_r(z_0)$. Dann kann man $h_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$ als Potenzreihe schreiben auf $B_r(z_0)$ und somit ist auch h_∞ holomorph.

Die Hauptteilverteilung auf K ist nun endlich und enthält genau die gewünschten Hauptteile f_k .

2) Weil die Polstellen keinen Häufungspunkt haben, gibt es für jedes $R \in \mathbb{R}^+$ höchstens endlich viele mit $|z_k| \leq R$. Setzt man $r_k = |z_k|$, dann folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$. Die Taylorreihe für f_k konvergiert für $|z| < r_k$ und man kann ein Taylorpolynom finden derart, dass

$$|f_k(z) - g_k(z)| < \frac{1}{2^k} \text{ für } z \in \overline{B_{r_k/2}(0)}.$$

Sei nun K eine kompakte Menge und sei k_K derart, dass $K \subset \overline{B_{r_{k_K}/2}(0)}$. Für $k \geq k_K$ ist $f_k - g_k$ holomorph auf K , und es gilt

$$\left| \sum_{k=k_K}^\infty (f_k(z) - g_k(z)) \right| \leq \sum_{k=k_K}^\infty |f_k(z) - g_k(z)| \leq \sum_{k=k_K}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k_K+1}} \text{ für } K.$$

So konvergiert $\sum_{k=k_K}^\infty (f_k - g_k)$ gleichmäßig auf K . □

Wenn es zwei Lösungen einer Hauptteilverteilung gibt, sagen wir f und \tilde{f} , dann hat $f - \tilde{f}$ nur hebbare Singularitäten und das bedeutet, dass

$$h(z) := \begin{cases} f(z) - \tilde{f}(z) & \text{für } z \notin \{z_k\} \\ \lim_{z \rightarrow z_k} (f(z) - \tilde{f}(z)) & \text{für } z = z_k \end{cases} \quad (11.11)$$

eine holomorphe Funktion ist.

Theorem 11.13 (Partialbruchzerlegung). *Sei f eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} mit Polstellen $0 = |z_0| < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$ ohne Häufungsstelle und mit Hauptteilverteilung $\{f_\ell\}_{\ell=0}^\infty$.*

1. Dann gibt es $\{\ell_k\}_{k=0}^\infty \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$g(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^\infty (f_k(z) - T_{\ell_k}(z)) \quad (11.12)$$

kompakt konvergiert. Hier ist $T_{\ell_k}(z)$ das Taylorpolynom zu f_k in 0 vom Grad ℓ_k .

2. Wenn

$$g(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(z) - T_{\ell_k}(z)) \quad (11.13)$$

kompakt konvergiert, dann gibt es eine ganze Funktion h derart, dass

$$f(z) = h(z) + g(z).$$

Bemerkung 11.13.1. Ohne Verlust der Allgemeinheit haben wir 0 als Polstelle genommen, denn man kann immer „verschieben“. Der Term f_0 enthält genau diesen Hauptteil.

Beweis. Jede meromorphe Funktion f kann nur Polstellen ohne Häufungspunkte haben. In der Nähe einer Polstelle hat f ein eindeutiges Hauptteil. Also hat f eine eindeutige Hauptteilverteilung. Der Satz von Mittag-Leffler liefert eine meromorphe Funktion g wie in (11.12).

Jede Funktion g , wie in (11.13), hat die gleiche Hauptteilverteilung. Betrachtet man zwei meromorphe Funktionen f und \tilde{f} mit gleicher Hauptteilverteilung $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$, dann liefert (11.11) die ganze Funktion h . \square

Wenn f eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} ist, dann ist auch die Hauptteilverteilung $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ festgelegt. Man kann nicht wie bei einer rationalen Funktion r sagen, dass es ein Polynom \tilde{p} gibt so, dass

$$r(z) = \tilde{p}(z) + \sum_{k=0}^m f_k(z),$$

denn für die Konvergenz muss man möglicherweise kompensieren durch Taylorpolynome von f_ℓ . Man findet jedoch, dass man eine meromorphe Funktion f wie folgt entwickeln kann. Es gibt eine holomorphe Funktion h so, dass

$$f(z) = h(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_k(z) - T_{\ell_k}(z)),$$

mit T_{ℓ_k} geschickt gewählte Polynome.

Beispiel 11.14. Wenn wir als Hauptteilverteilung $\left\{\frac{1}{z-n}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ haben wollen, dann ist

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

eine passende meromorphe Funktion. Sei $K \subset B_R(0)$. Dann gilt:

1. Für $|n| \geq n_0 := 2[R+1]$ ist $z \mapsto \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$ holomorph auf K ;
2. für $z \in K$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \in \mathbb{N} \text{ mit } |n| \geq n_0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \right| &\leq \sum_{n \in \mathbb{N} \text{ mit } |n| \geq n_0} \left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right| = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N} \text{ mit } |n| \geq n_0} \left| \frac{z}{n(n-z)} \right| \leq \sum_{m=n_0}^{\infty} \frac{4R}{m^2} < \frac{4R}{n_0-1} < \infty. \end{aligned}$$

Beispiel 11.15. Wenn $\left\{ \frac{1}{z-(n+mi)} \right\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$ die Hauptteilverteilung ist, dann ist

$$\frac{1}{z} + \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{Z} \\ (n,m) \neq (0,0)}} \left(\frac{1}{z-(n+mi)} + \frac{1}{n+mi} + \frac{z}{(n+im)^2} \right) \quad (11.14)$$

kompakt konvergent und liefert also eine passende meromorphe Funktion.

Man kann sich fragen, ob der Ausdruck

$$\frac{1}{z} + \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{Z} \\ (n,m) \neq (0,0)}} \left(\frac{1}{z-(n+mi)} + \frac{1}{n+mi} \right) \quad (11.15)$$

kompakt konvergent ist. Diese Frage ist nicht einfach zu beantworten. Absolut konvergent auf kompakten Mengen ist diese Reihe jedoch nicht.

Die Frage, ob eine Reihe absolute konvergent ist, ist meistens einfacher. Für (11.14) berechnet man

$$\left| \frac{1}{z-(n+mi)} + \frac{1}{n+mi} + \frac{z}{(n+im)^2} \right| = \left| \frac{z^2}{(n+mi)^2(z-(n+mi))} \right|.$$

Für z in eine kompakte Menge gilt

$$\left| \frac{z^2}{(n+mi)^2(z-(n+mi))} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{1}{|n+mi|^3} \right) \text{ für } |n+mi| \rightarrow \infty,$$

und man kann die Summe mit einem Integral vergleichen:

$$\sum_{\substack{n,m \in \mathbb{Z} \\ (n,m) \neq (0,0)}} \frac{1}{|n+mi|^3} \sim \int_{|(x,y)| > 1} \frac{1}{|x+iy|^3} dx dy = 2\pi \int_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} r dr < \infty.$$

Man kann sich selber überlegen, was mit \sim gemeint ist. Ähnlich kann man auch zeigen, dass (11.15) nicht absolut konvergent ist.

11.4 Beispiele einiger Partialbruchentwicklungen

Proposition 11.16. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\frac{1}{(\sin z)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}. \quad (11.16)$$

Beweis. Weil die Funktion $z \mapsto 1/(\sin z)^2$ Polstellen in $n\pi$ hat und weil in einer Umgebung von $n\pi$ gilt

$$\sin z = (-1)^n (z-n\pi) (1 + \mathcal{O}(z-n\pi)^2),$$

gilt auch

$$\begin{aligned} (\sin z)^2 &= (z-n\pi)^2 (1 + \mathcal{O}(z-n\pi)^2)^2 = \\ &= (z-n\pi)^2 (1 + \mathcal{O}(z-n\pi)^2) \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{(\sin z)^2} = \frac{1}{(z - n\pi)^2} (1 + \mathcal{O}(z - n\pi)^2) = \frac{1}{(z - n\pi)^2} + \mathcal{O}(1).$$

Deshalb hat $1/(\sin z)^2$ die Hauptteilverteilung

$$\left\{ \frac{1}{(z - n\pi)^2} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Sei K kompakt und $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $K \subset B_{n_0\pi/2}(0)$. Dann gilt für $z \in K$ und $|n| \geq n_0$, dass

$$|z - n\pi| \geq |n\pi| - |z| \geq |n\pi| - |n_0\pi/2| \geq \frac{1}{2} |n| \pi$$

und

$$\left| \sum_{|n| \geq n_0} \frac{1}{(z - n\pi)^2} \right| \leq \sum_{|n| \geq n_0} \frac{4}{n^2 \pi^2}.$$

Also ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$ kompakt konvergent, und man findet mit dem Satz von Mittag-Leffler, dass g mit

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

eine meromorphe Funktion ist mit gleicher Hauptteilverteilung wie $z \mapsto 1/(\sin z)^2$. Der Satz zur Partialbruchzerlegung besagt, dass

$$h(z) = \left(\frac{1}{\sin z} \right)^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} \quad (11.17)$$

eine ganze Funktion ist (nach Fortsetzung durch die Grenzwerte an der Stellen $n\pi$).

Wir müssen noch zeigen, dass h gleich 0 ist und schauen uns h aus (11.17) genauer an. Weil beide Terme in der rechten Seite von (11.17) periodisch sind in der reellen Richtung, ist h periodisch:

$$h(z + 2k\pi) = h(z) \text{ für } z \in \mathbb{C}.$$

Dann ist h auch beschränkt auf $\mathbb{R} + i[a, b]$. Außerdem gilt, dass h gegen 0 konvergiert in den imaginären Richtungen. Für den ersten Term gilt:

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{\sin z} \right)^2 \right| &= \left| \frac{2i}{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y} \right|^2 = \\ &= \frac{4}{|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y|^2} \leq \frac{4}{(e^{|y|} - e^{-|y|})^2} \rightarrow 0 \text{ für } |y| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Für die Abschätzung des zweiten Terms und für $|y| \geq \pi$ setzen wir $n_x = [x/\pi]$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} \right| &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z - n\pi|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - n\pi)^2 + y^2} \leq \\ &\leq \sum_{n=n_x+1}^{\infty} \frac{1}{(n - n_x - 1)^2 \pi^2 + y^2} + \frac{1}{y^2} + \sum_{n=-\infty}^{n_x-1} \frac{1}{(n - n_x + 1)^2 \pi^2 + y^2} \leq \\ &\leq \frac{3}{y^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 t^2 + y^2} dt = \frac{3}{y^2} + \frac{1}{|y|} \rightarrow 0 \text{ für } |y| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Dann gilt

$$|h(x + iy)| \leq \left| \left(\frac{1}{\sin z} \right)^2 \right| + \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} \right| \rightarrow 0 \text{ für } |y| \rightarrow \infty. \quad (11.20)$$

Also h ist beschränkt und aus dem Satz von Liouville folgt, dass h konstant ist. Wegen der Abschätzung in (11.20) folgt sogar $h = 0$. \square

Proposition 11.17. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}, \\ \left(\frac{\pi}{\cos(\pi z)} \right)^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2} - n\right)^2}, \\ \pi \cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right), \\ \pi \tan(\pi z) &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z - \frac{1}{2} - n} + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right), \\ \frac{\pi}{\sin(\pi z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right), \\ \frac{\pi}{\sin(\pi z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}, \\ \frac{\pi}{\cos(\pi z)} &= \pi + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \left(\frac{1}{z + n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right), \\ \frac{\pi}{\cos(\pi z)} &= \pi + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n + 1}{z^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2}{n + \frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Der Beweis der ersten Formel folgt aus Proposition 11.16. Die übrigen Beweise werden dem Leser überlassen.

Bemerkung 11.17.1. Die zweite Formel aus Proposition 11.17 liefert für $z = 0$:

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \left(\frac{\pi}{\cos(0)} \right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - n\right)^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n - 1)^2} \\ &= 8 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Die sechste Formel liefert für $z = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\pi}{\sin\left(\pi \frac{1}{2}\right)} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\frac{1}{4} - n^2} = 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n + 1)(2n - 1)} \\ &= 2 + 4 \left(\frac{1}{3 \times 1} - \frac{1}{5 \times 3} + \frac{1}{7 \times 5} - \frac{1}{9 \times 7} + \frac{1}{11 \times 9} - \dots \right) \\ &= 2 + 16 \left(\frac{1}{5 \times 3 \times 1} + \frac{1}{9 \times 7 \times 5} + \frac{1}{13 \times 11 \times 9} + \dots \right). \end{aligned}$$

Funktionentheorie, Woche 12



Funktionen und Nullstellen

12.1 Ganze Funktionen mit bestimmten Nullstellen

Statt die Polstellen vorzugeben, kann man sich auch fragen, ob man bei gegebenen Nullstellen eine ganze Funktion finden kann, die genau diese Nullstellen hat. Bei endlich vielen Nullstellen $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ ist die Antwort einfach: Man nehme das Polynom

$$p(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k).$$

Für unendlich viele Nullstellen $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ könnte man folgendes versuchen:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (z - z_k). \quad (12.1)$$

Übrigens, wenn $\{\prod_{k=1}^n a_k\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, schreibt man

$$\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \alpha_k$$

Man kann sich sofort überlegen, dass, wenn $\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k \neq 0$ gelten soll, diese Folge nur konvergiert, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k = 1$.

Also nur wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} (z - z_n) = 1$, könnte (12.1) einen Sinn ergeben. Die Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} (z - z_n) = 1$ ist für kein z erfüllt, wenn die z_n nicht konvergieren. Wenn die z_n konvergieren, dann sagt der Identitätssatz (Theorem 7.7), dass $f(z) \equiv 0$.

Ein besserer Vorschlag als (12.1) wäre

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right). \quad (12.2)$$

Wenn die z_k keine Häufungspunkte haben, dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$ und für jedes $z \in \mathbb{C}$ folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) = 1.$$

Diese letzte Bedingung ist eine notwendige, aber noch keine hinreichende Bedingung für Konvergenz.

Definition 12.1. Die ganze Funktion f hat eine Nullstellenverteilung $\{(a_k, n_k)\}_{k=1}^{\infty}$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $n_k \in \mathbb{N}^+$, wenn f genau die Nullstellen a_k von Ordnung n_k hat.

Beispiel 12.2. Die Sinusfunktion hat die Nullstellenverteilung $\{(k\pi, 1)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Die zentrale Frage in diesem Kapitel ist:

Wenn N eine Nullstellenverteilung (ohne Häufungspunkt von Nullstellen) ist, gibt es eine ganze Funktion f , die diese Nullstellenverteilung hat?

Wir werden die Ergebnisse bei der Hauptteilverteilung nutzen und brauchen dazu einige technische Ergebnisse.

Bemerkung 12.2.1. Im Gegensatz zur Hauptteilverteilung, bei der nicht nur die Ordnung der Polen vorgeschrieben werden, sondern auch die Koeffizienten, wird bei der Nullstellenverteilung nur die Ordnung der Nullstellen vorgeschrieben.

12.2 Unendliche Produkte und Reihen

Wir haben gesehen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 1$ notwendig ist für die Konvergenz bei

$$\prod_{k=1}^n w_k \rightarrow \ell \neq 0.$$

Die Konvergenz bei diesem Produkt kann man mit der Konvergenz einer Reihe vergleichen. Schreiben wir $w_k = 1 + \alpha_k$ und lassen α_k nach 0 konvergieren, dann kann man sehen, dass die Konvergenz von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k)$$

und die Konvergenz von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

sich sehr ähneln.

Lemma 12.3. Sei $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \text{Log}(1 + \alpha_k)$ konvergiert gegen ein $L \in \mathbb{C}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 + \alpha_k)$ konvergiert gegen ein $\ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Bemerkung 12.3.1. Aus diesen Aussagen folgt nicht, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log}(\prod_{k=0}^n (1 + \alpha_k))$ konvergiert: $\text{Log}(\prod_{k=0}^n (1 + \alpha_k))$ ist meistens nicht gleich $\sum_{k=0}^n \text{Log}(1 + \alpha_k)$.

Bemerkung 12.3.2. Hier nehmen wir $\text{Log}(z) = \ln |z| + i \text{Arg}(z)$ mit $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beweis. (\Rightarrow) Man bemerke, dass

$$\exp\left(\sum_{n=0}^k \operatorname{Log}(1 + \alpha_n)\right) = \prod_{n=0}^k (1 + \alpha_n).$$

Wenn der Ausdruck innerhalb der Klammern links konvergiert, konvergiert auch $\exp(\dots)$ und damit die rechte Seite. Weil $\exp(L) \neq 0$ gilt, liegt der Grenzwert in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(\Leftarrow) Sei $\varepsilon > 0$. Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 + \alpha_k)$ gegen $\ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ konvergiert, dann gilt $1 + \alpha_n \rightarrow 1$ und $\ell^{-1} \prod_{k=0}^n (1 + \alpha_k) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. Auch gilt

$$\frac{\ell}{\prod_{k=0}^n (1 + \alpha_k)} \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Genauer gesagt: Es gibt $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\begin{cases} \text{a.} & |\alpha_n| < \varepsilon & \text{für alle } n \geq n_\varepsilon, \\ \text{b.} & \left| \ell^{-1} \prod_{k=0}^n (1 + \alpha_k) - 1 \right| < \varepsilon & \text{für alle } n \geq n_\varepsilon, \end{cases} \quad (12.3)$$

und mit der Stetigkeit vom Argument auf $B_1(1)$ kann man sogar n_ε finden, so dass auch noch folgendes gilt:

$$\begin{cases} \text{c.} & |\operatorname{Arg}(1 + \alpha_n)| < \varepsilon & \text{für alle } n \geq n_\varepsilon, \\ \text{d.} & \left| \operatorname{Arg}\left(\ell^{-1} \prod_{k=0}^n (1 + \alpha_k)\right) \right| < \varepsilon & \text{für alle } n \geq n_\varepsilon. \end{cases} \quad (12.4)$$

Für $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ springt das Argument nicht und folgt, dass

$$\begin{aligned} & \left| \operatorname{Arg}\left(\prod_{k=n_\varepsilon}^n (1 + \alpha_k)\right) \right| = \left| \operatorname{Arg}\left(\frac{\ell^{-1} \prod_{k=0}^n (1 + \alpha_k)}{\ell^{-1} \prod_{k=0}^{n_\varepsilon-1} (1 + \alpha_k)}\right) \right| = \\ & = \left| \operatorname{Arg}\left(\ell^{-1} \prod_{k=0}^n (1 + \alpha_k)\right) - \operatorname{Arg}\left(\ell^{-1} \prod_{k=0}^{n_\varepsilon-1} (1 + \alpha_k)\right) \right| < 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Verwenden wir wiederholt (12.5) und (12.4.c), dann folgt für $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}\pi)$, dass auch hier das Argument nicht springt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}\left(\prod_{k=n_\varepsilon}^n (1 + \alpha_k)\right) &= \operatorname{Arg}\left(\left(\prod_{k=n_\varepsilon}^{n-1} (1 + \alpha_k)\right) (1 + \alpha_n)\right) = \\ &= \operatorname{Arg}\left(\prod_{k=n_\varepsilon}^{n-1} (1 + \alpha_k)\right) + \operatorname{Arg}(1 + \alpha_n) = \\ &= \operatorname{Arg}\left(\prod_{k=n_\varepsilon}^{n-2} (1 + \alpha_k)\right) + \operatorname{Arg}(1 + \alpha_{n-1}) + \operatorname{Arg}(1 + \alpha_n) = \\ &= \dots = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^n \operatorname{Arg}(1 + \alpha_k). \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} \left(\prod_{k=n_\varepsilon}^n (1 + \alpha_k) \right) &= \ln \left(\prod_{k=n_\varepsilon}^n |1 + \alpha_k| \right) + i \operatorname{Arg} \left(\prod_{k=n_\varepsilon}^n (1 + \alpha_k) \right) = \\ &= \sum_{k=n_\varepsilon}^n \ln |1 + \alpha_k| + i \sum_{k=n_\varepsilon}^n \operatorname{Arg} (1 + \alpha_k) = \sum_{k=n_\varepsilon}^n \operatorname{Log}(1 + \alpha_k). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Für $\varepsilon > 0$ aber genügend klein, können wir diese Abschätzungen benutzen.

Weil $\operatorname{Arg} \left(\prod_{k=n_\varepsilon}^n (1 + \alpha_k) \right) < 2\varepsilon$ und der Logarithmus stetig ist außerhalb von $(-\infty, 0]$, folgt aus der Konvergenz von $\left\{ \prod_{k=n_\varepsilon}^n (1 + \alpha_k) \right\}_{n=n_\varepsilon}^\infty$ mit Hilfe von (12.6) die Konvergenz von $\left\{ \sum_{k=n_\varepsilon}^n \operatorname{Log}(1 + \alpha_k) \right\}_{n=n_\varepsilon}^\infty$. \square

Lemma 12.4. Sei $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |\alpha_k|$ konvergiert.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |\operatorname{Log}(1 + \alpha_k)|$ konvergiert.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \ln(1 + |\alpha_k|)$ konvergiert.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 + |\alpha_k|)$ konvergiert.

Beweis. (1 \Rightarrow 3) Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |\alpha_k|$ konvergiert, dann folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = 0$. Man verwendet

$$\ln(1 + t) \leq t \text{ für } t \in [0, 1]$$

und das Majorantenkriterium.

(3 \Rightarrow 1) Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \ln(1 + |\alpha_k|)$ konvergiert, dann folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + |\alpha_n|) = 0$ und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(1 + |\alpha_n|)} - 1 = 0.$$

Man verwendet außerdem

$$t \ln 2 \leq \ln(1 + t) \text{ für } t \in [0, 1]$$

und das Majorantenkriterium für

$$\sum_{k=n_0}^n |\alpha_k| \leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=n_0}^n \ln(1 + |\alpha_k|).$$

(1 \Rightarrow 2) Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |\alpha_k|$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = 0$. Für $|\alpha_k| < \frac{1}{2}$ gilt

$$|\operatorname{Log}(1 + \alpha_k)| = \left| \int_{[1, 1 + \alpha_k]} \frac{1}{z} dz \right| \leq |\alpha_k| \max_{z \in [1, 1 + \alpha_k]} \left| \frac{1}{z} \right| = 2|\alpha_k|.$$

Auch hier komplettiert das Majorantenkriterium den Beweis.

(2 \Rightarrow 1) Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |\operatorname{Log}(1 + \alpha_k)|$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Log}(1 + \alpha_k) = 0$. Für $|\operatorname{Log}(1 + \alpha_k)| < \frac{1}{2}$ folgt

$$|\alpha_k| = |e^{\operatorname{Log}(1 + \alpha_k)} - 1| = \left| \int_{[0, \operatorname{Log}(1 + \alpha_k)]} e^z dz \right| \leq |\operatorname{Log}(1 + \alpha_k)| \sqrt{e}.$$

(3 \Leftrightarrow 4) Diese Ergebnisse folgen aus Lemma 12.3. \square

12.3 Der Satz von Weierstraß

Lemma 12.5. *Wenn g eine ganze Funktion ohne Nullstellen ist, dann gibt es eine ganze Funktion h mit*

$$g(z) = e^{h(z)}.$$

Beweis. Wenn g eine ganze Funktion ohne Nullstellen ist, dann ist $z \mapsto g'(z)/g(z)$ eine ganze Funktion. Weil \mathbb{C} einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Stammfunktion h von $z \mapsto g'(z)/g(z)$ mit $h(0) = \text{Log}(g(0))$. Weil

$$(g(z)e^{-h(z)})' = g'(z)e^{-h(z)} - g(z)e^{-h(z)}h'(z) = 0,$$

folgt $g(z) = ce^{h(z)}$ und aus $h(0) = \text{Log}(g(0))$ folgt $c = 1$. □

Korollar 12.6. *Wenn zwei ganze Funktionen g_1, g_2 die gleiche Nullstellenverteilung haben, dann gibt es eine ganze Funktion h mit*

$$g_1(z) = e^{h(z)}g_2(z).$$

Theorem 12.7 (Produktsatz von Weierstraß¹). *Sei $\{(a_k, n_k)\}_{k=0}^{\infty}$ eine Nullstellenverteilung ohne Häufungspunkt. Wir dürfen annehmen, dass*

$$0 = a_0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots .$$

Sei $\ell_k \in \mathbb{N}$. Wenn

$$g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} n_k \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \sum_{m=0}^{\ell_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^m \right) \quad (12.7)$$

kompakt konvergiert, dann ist

$$f(z) := z^{n_0} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_k} \right) \exp \left(\sum_{m=1}^{\ell_k+1} \frac{1}{m} \left(\frac{z}{a_k} \right)^m \right) \right)^{n_k} \quad (12.8)$$

eine ganze Funktion mit obengenannter Nullstellenverteilung.

Bemerkung 12.7.1. Das Taylorpolynom vom Ordnung ℓ_k zu $z \mapsto (z - a_k)^{-1}$ bei $z = 0$ ist genau

$$T_{\ell_k}(z) = \frac{-1}{a_k} \sum_{m=0}^{\ell_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^m .$$

Theorem 11.13 besagt, dass wenn man ℓ_k genügend groß wählt, g in (12.7) kompakt konvergent ist.

Beweis. Setzen wir

$$h_k(z) = \left(\left(1 - \frac{z}{a_k} \right) \exp \left(\sum_{m=0}^{\ell_k} \frac{1}{m+1} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{m+1} \right) \right)^{n_k} ,$$

dann folgt

$$\frac{h'_k(z)}{h_k(z)} = n_k \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \sum_{m=0}^{\ell_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^m \right) := g_k(z).$$

¹Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815-1897, verließ 1838 die Universität Bonn ohne Abschluss.

Wir haben vorausgesetzt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$ kompakt konvergiert. Dann gibt es für jede kompakte Menge K ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass g_k holomorph ist auf K für $k > k_0$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} g_k(z)$ gleichmäßig konvergiert auf K . Es reicht, wenn wir die kompakten Mengen $\overline{B_R(0)}$ betrachten. Für $z \in \overline{B_R(0)}$ und $k \geq k_0$ ist

$$G_k(z) = \int_{[0,z]} g_k(w) dw = n_k \operatorname{Log} \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) + \sum_{m=0}^{\ell_k} \frac{1}{m+1} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{m+1}$$

wohldefiniert, und die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=k_0}^{\infty} g_k(z)$ auf $\overline{B_R(0)}$ impliziert die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=k_0}^{\infty} G_k(z)$ konvergiert gleichmäßig auf $\overline{B_R(0)}$. Dann konvergiert auch

$$\exp \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} G_k(z) \right) = \prod_{k=k_0}^{\infty} \exp(G_k(z)) = \prod_{k=k_0}^{\infty} h_k(z)$$

und

$$\left(z^{n_0} \prod_{k=1}^{k_0-1} h_k(z) \right) \prod_{k=k_0}^{\infty} h_k(z) = z^{n_0} \prod_{k=1}^{\infty} h_k(z) = f(z)$$

auf $\overline{B_R(0)}$. Also ist die Folge kompakt konvergent und der Limes hat genau die gewünschten Nullstellen. \square

12.4 Einige Nullstellenentwicklungen

Proposition 12.8. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{k} \right) e^{z/k}. \quad (12.9)$$

Beweis. Die Folge

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right)$$

konvergiert kompakt. Mit Theorem 12.7 folgt, dass f , definiert durch

$$f(z) = z \prod_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{k} \right) \exp \left(\frac{z}{k} \right),$$

eine ganze Funktion ist mit $\{(k, 1); k \in \mathbb{Z}\}$ als Nullstellenmenge. Mit Korollar 12.6 gibt es eine ganze Funktion h mit

$$\sin(\pi z) = e^{h(z)} f(z).$$

Dann gilt, wenn wir beweisen, dass

$$\begin{aligned} f'(z) &= \prod_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{k} \right) \exp \left(\frac{z}{k} \right) + \\ &+ \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} z \left(\left(1 - \frac{z}{m} \right) \exp \left(\frac{z}{m} \right) \right)' \prod_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, m\}} \left(1 - \frac{z}{k} \right) \exp \left(\frac{z}{k} \right), \end{aligned}$$

das folgende:

$$\begin{aligned} \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin(\pi z)} &= \frac{e^{h(z)}h'(z)f(z) + e^{h(z)}f'(z)}{e^{h(z)}f(z)} = h'(z) + \frac{f'(z)}{f(z)} = \\ &= h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\left(\left(1 - \frac{z}{k}\right) \exp\left(\frac{z}{k}\right) \right)'}{\left(1 - \frac{z}{k}\right) \exp\left(\frac{z}{k}\right)} = \\ &= h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\left(-\frac{1}{k} \exp\left(\frac{z}{k}\right) + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{z}{k}\right) \exp\left(\frac{z}{k}\right)\right)}{\left(1 - \frac{z}{k}\right) \exp\left(\frac{z}{k}\right)} = \\ &= h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

Aus Proposition 11.17 weiß man, dass

$$\frac{(\sin(\pi z))'}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right)$$

und es gilt $h'(z) = 0$. Mit $f'(0) = 1$ und

$$\pi \cos(0) = (\sin(\pi z))'_{z=0} = e^{h(0)}(h'(0)f(0) + f'(0)) = e^{h(0)}$$

finden wir

$$e^{h(z)} = \pi$$

und das Ergebnis folgt. □

Proposition 12.9. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(\pi z) &= \pi z \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right), \\ \cos(\pi z) &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{k + \frac{1}{2}}\right) \exp\left(\frac{z}{k + \frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Bemerkung 12.9.1. Diese Formel für den Sinus führt zu dem Euler-Wallis Produkt für den Sinus:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdots$$

Korollar 12.10 (Produkt von Wallis).

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}.$$

Beweis. Setzen wir $z = \frac{1}{2}$ ein in die Formel für $\sin(\pi z)$ in Proposition 12.9, so folgt

$$1 = \sin(\pi/2) = \pi/2 \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \left(1 - \frac{1/4}{k^2}\right) = \pi/2 \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{(k - \frac{1}{2})(k + \frac{1}{2})}{k^2}$$

und

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{k^2}{(k - \frac{1}{2})(k + \frac{1}{2})} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdots$$

□

Funktionentheorie, Woche 13

$f(z)$

Spezielle Funktionen

13.1 Die Gamma-Funktion

Weil $\sum_{k \in \mathbb{N}^+} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right)$ kompakt konvergiert, folgt aus Theorem 12.7, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = z \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \left(1 + \frac{z}{k} \right) \exp \left(-\frac{z}{k} \right) \quad (13.1)$$

wohldefiniert ist als ganze Funktion auf \mathbb{C} . Diese Funktion f hat einfache Nullstellen in $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$. Weil die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{k} \right) \exp \left(-\frac{z}{k} \right) - 1 \right)$$

konvergiert, es gilt nämlich

$$\left(1 + \frac{z}{k} \right) \exp \left(-\frac{z}{k} \right) - 1 = -\frac{z^2}{k^2} + \mathcal{O} \left(\frac{z}{k} \right)^3 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

kann man die Konvergenz auch folgern mit den Ergebnissen aus Abschnitt 12.2.

Wir möchten diese Konvergenz näher betrachten und definieren

$$f_n(z) = z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) \exp \left(-\frac{z}{k} \right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{z f_n(z+1)}{f_n(z)} &= \frac{z(z+1) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z+1}{k} \right) \exp \left(-\frac{z+1}{k} \right)}{z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) \exp \left(-\frac{z}{k} \right)} = \\ &= (z+1) \prod_{k=1}^n \frac{k+z+1}{k+z} \exp \left(-\frac{1}{k} \right) = \\ &= (n+z+1) \exp \left(\sum_{k=1}^n -\frac{1}{k} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{z+1}{n} \right) \exp \left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right). \end{aligned} \quad (13.2)$$

Der Limes der Folge $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \quad (13.3)$$

existiert, denn aus

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n$$

folgt, dass $\gamma_n \in [0, 1]$, und aus

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq 0$$

folgt, dass $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine fallende Folge ist.

Definition 13.1. Die **Euler-Mascheroni¹-Konstante** wird definiert durch

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.577215664901532860606512\dots \quad (13.4)$$

Bemerkung 13.1.1. Es ist noch immer nicht bekannt, ob γ rational oder irrational ist.

Wenn wir die Funktion $z \mapsto f_n(z)e^{\gamma_n z}$ mit dem Quotienten in (13.2) vergleichen, folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z f_n(z+1)e^{\gamma_n(z+1)}}{f_n(z)e^{\gamma_n z}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z+1}{n} \right) = 1. \quad (13.5)$$

Man definiert

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f_n(z)e^{\gamma_n z}} = \frac{1}{f(z)e^{\gamma z}}, \quad (13.6)$$

oder expliziter:

Definition 13.2. Die meromorphe Funktion Γ auf \mathbb{C} , definiert durch

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \left(1 + \frac{z}{k} \right)^{-1} \exp \left(\frac{z}{k} \right) \quad (13.7)$$

mit γ aus (13.4), heißt **Gamma-Funktion**. Sie hat Pole in $\{-n; n \in \mathbb{N}\}$.

Lemma 13.3. Es gilt:

- $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$,
- $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die erste Eigenschaft folgt aus (13.6) und (13.5). Weil

$$\Gamma(1) = \lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z+1) = \lim_{z \rightarrow 0} z \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} e^{-\gamma z} \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \left(1 + \frac{z}{k} \right)^{-1} \exp \left(\frac{z}{k} \right) = 1,$$

folgt die zweite Eigenschaft mit Induktion aus den ersten. \square

¹Lorenzo Mascheroni (1750-1800) hat 1790 in seinem Werk *Adnotationes ad calculum integralem Euleri* einige Integraldarstellungen dieser Konstante beschrieben.

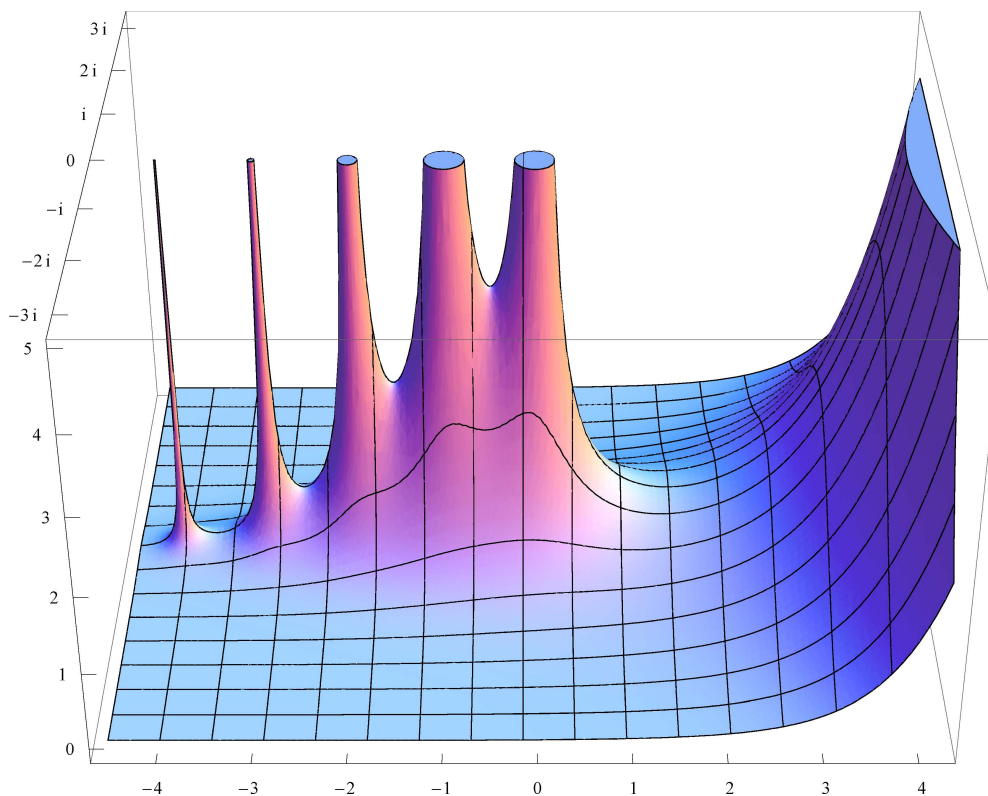


Abbildung 13.1: Die Funktionenlandschaft zur Gamma-Funktion. Die Γ -Funktion hat Polstellen in $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$.

Bemerkung 13.3.1. Die dritte Eigenschaft besagt, dass die Gamma-Funktion $z \mapsto \Gamma(z+1)$ eine meromorphe Erweiterung von $n \mapsto n!$ ist.

Lemma 13.4. Es gilt $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Beweis. Man verwende aus Proposition 12.9, dass

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right),$$

(13.7) und $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= -\Gamma(z) z \Gamma(-z) = \\ &= \frac{1}{z} \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \exp\left(\frac{z}{k}\right) \left(1 + \frac{-z}{k}\right)^{-1} \exp\left(\frac{-z}{k}\right) = \\ &= \frac{\pi}{\pi z \prod_{k \in \mathbb{N}^+} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \end{aligned}$$

□

Lemma 13.5. Es gilt $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \exp(z \ln n)}{\prod_{k=0}^n (k+z)}$.

Bemerkung 13.5.1. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ folgt

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Beweis. Man verwende die Definition von Γ und die Folge in (13.3):

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \exp\left(\frac{z}{k}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z \prod_{k=1}^n (k+z)} \exp\left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma_n\right) z\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (k+z)} \exp(z \ln n)\end{aligned}$$

□

Lemma 13.6. Für $\operatorname{Re} z \geq 1$ gilt

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp((z-1) \ln(t) - t) dt. \quad (13.8)$$

Bemerkung 13.6.1. Für $x \geq 1$ folgt:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Beweis. Bemerke, dass

$$|\exp((z-1) \ln(t) - t)| = \exp((\operatorname{Re}(z) - 1) \ln(t) - t) = t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t}. \quad (13.9)$$

Wenn $\operatorname{Re}(z) - 1 \geq 0$ gilt, dann ist das Integral in (13.8) nur uneigentlich in ∞ . Wegen die Abschätzung in (13.9) konvergiert das Integral. Das heißt, für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $M_{z,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \int_{M_{z,\varepsilon}}^{\infty} \exp((z-1) \ln(t) - t) dt \right| \leq \int_{M_{z,\varepsilon}}^{\infty} t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t} dt < \varepsilon. \quad (13.10)$$

Weil $\ln(1-s) \leq -s$ für $s \in (0, 1)$ folgt, dass $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$ und auch

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Also wir finden auch, dass für $n > M_{z,\varepsilon}$ gilt

$$0 \leq \int_{M_{z,\varepsilon}}^n t^{\operatorname{Re}(z)-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \leq \int_{M_{z,\varepsilon}}^n t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t} dt < \varepsilon. \quad (13.11)$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t},$$

folgt für $t \in [0, M_{z,\varepsilon}]$, dass es $N_{z,\varepsilon} \geq M_{z,\varepsilon}$ gibt, mit für $n > N_{z,\varepsilon}$:

$$\left| \int_0^{M_{z,\varepsilon}} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \exp((z-1) \ln(t)) dt - \int_0^{M_{z,\varepsilon}} e^{-t} \exp((z-1) \ln(t)) dt \right| < \varepsilon. \quad (13.12)$$

Kombiniert man die Abschätzungen in (13.10,13.11,13.12), so folgt für $n > N_{z,\varepsilon}$:

$$\left| \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \exp((z-1)\ln(t)) dt - \int_0^\infty \exp((z-1)\ln(t) - t) dt \right| < 3\varepsilon.$$

Es gilt also, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \exp((z-1)\ln(t)) dt = \int_0^\infty \exp((z-1)\ln(t) - t) dt \quad (13.13)$$

Weil

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{z} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \exp(z \ln(t)) \right) = \\ &= \frac{-1}{z} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \exp(z \ln(t)) + \frac{1}{z} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \exp(z \ln(t)) \frac{z}{t} \\ &= \frac{-1}{z} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \exp(z \ln(t)) + \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \exp((z-1)\ln(t)) \end{aligned}$$

finden wir auch

$$\begin{aligned} & \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \exp((z-1)\ln(t)) dt = \\ &= \frac{1}{z} \left[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \exp(z \ln(t)) \right]_0^n + \frac{1}{z} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \exp(z \ln(t)) dt = \\ &= \frac{1}{z(z+1)} \left[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \exp((z+1)\ln(t)) \right]_0^n + \\ & \quad + \frac{1}{z(z+1)} \frac{n-1}{n} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} \exp((z+1)\ln(t)) dt = \quad (13.14) \\ &= \dots \text{ (wiederholte partielle Integration) } \dots = \\ &= \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \frac{1}{n^{n-1}} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^0 \exp((z+n-1)\ln(t)) dt = \\ &= \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \frac{1}{(z+n)n^{n-1}} \exp((z+n)\ln n) = \\ &= \frac{n! \exp(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)}. \quad (13.15) \end{aligned}$$

Die Kombination von (13.13) und (13.15) mit Lemma 13.5 komplettiert den Beweis. \square

13.2 Die Riemannsche ζ -Funktion

Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $s \in \mathbb{R}$ ist x^s wohldefiniert und es gilt

$$x^s = \exp(s \ln x).$$

Für $s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ kann man sogar „ z^s “ definieren durch

$$\exp(s \operatorname{Log}(z)).$$

Weil $\operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$ nicht unbedingt $\operatorname{Log}(z_1 z_2)$ gleicht, sondern es $k \in \{-1, 0, 1\}$ gibt mit

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2) &= \ln|z_1| + i\operatorname{Arg}(z_1) + \ln|z_2| + i\operatorname{Arg}(z_2) \\ &= \ln(|z_1||z_2|) + i\operatorname{Arg}(z_1 z_2) + i2k\pi = \operatorname{Log}(z_1 z_2) + i2k\pi,\end{aligned}$$

soll man jedoch vorsichtig sein beim Rechnen mit dieser Erweiterung.

Definition 13.7. Die Riemann- ζ -Funktion ist für $s \in (1, \infty)$ definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (13.16)$$

Hier ist ζ der griechische Buchstabe Zeta.

Diese unendliche Summe ist für reelle s genau dann endlich, wenn $s \in (1, \infty)$. Kann man diese Funktion erweitern für komplexe Zahlen? Weil für $s + it$ gilt, dass

$$|\exp(-(s + it)\ln n)| = \exp(-s \ln n) = n^{-s}$$

sieht man sofort, dass die Reihe in (13.16) absolut konvergent ist, wenn $\operatorname{Re}(s + it) > 1$. Man kann die Funktion ζ für solche z dann auch direkt wie folgt erweitern:

Lemma 13.8. Setzt man

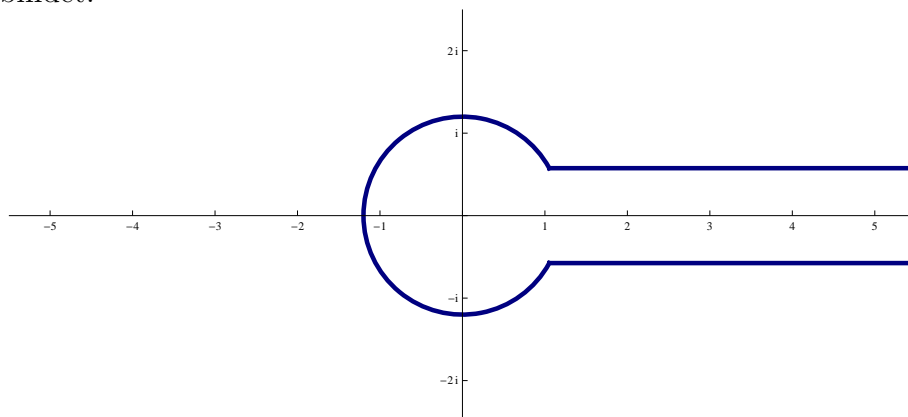
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-z \ln n) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z > 1, \quad (13.17)$$

dann ist diese eine Erweiterung der Riemann- ζ -Funktion.

Beweis. Für $\operatorname{Re} z > 1$ ist die Reihe in (13.17) konvergent und deshalb wohldefiniert. Für $z \in (1, \infty)$ folgt (13.16) und dies zeigt, sie ist eine Erweiterung. \square

Sogar für andere $z \in \mathbb{C}$ kann man die Funktion erweitern aber dazu müssen wir uns einiges überlegen.

Sei $\gamma_{r,\delta}$ mit $0 < \delta < r < \pi$ eine Kurve, die $\infty_{\mathbb{R}} + i\delta$, $\sqrt{r^2 - \delta^2} + i\delta$, $\sqrt{r^2 - \delta^2} - i\delta$ und $\infty_{\mathbb{R}} - i\delta$ verbindet.



Um genau zu sein, sie kombiniert

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: \left(-\infty_{\mathbb{R}}, \sqrt{r^2 - \delta^2}\right] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \gamma_1(t) = -t + i\delta, \\ \gamma_2 &: \left[\arcsin\left(\frac{\delta}{r}\right), 2\pi - \arcsin\left(\frac{\delta}{r}\right)\right] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \gamma_2(t) = r e^{it}, \\ \gamma_3 &: \left[\sqrt{r^2 - \delta^2}, \infty_{\mathbb{R}}\right) \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \gamma_3(t) = t - i\delta.\end{aligned}$$

Theorem 13.9. Sei $\gamma_{r,\delta}$ wie oben. Wenn $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$, dann gilt

$$\zeta(z) = -\Gamma(1-z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,\delta}} \frac{\exp\left((z-1)\operatorname{Log}(-w)\right)}{\exp(w)-1} dw. \quad (13.18)$$

Lemma 13.10. Sei $0 < \delta < r < \pi$. Die rechte Seite in (13.18) hängt nicht von r oder δ ab und ist wohldefiniert als meromorphe Funktion auf \mathbb{C} .

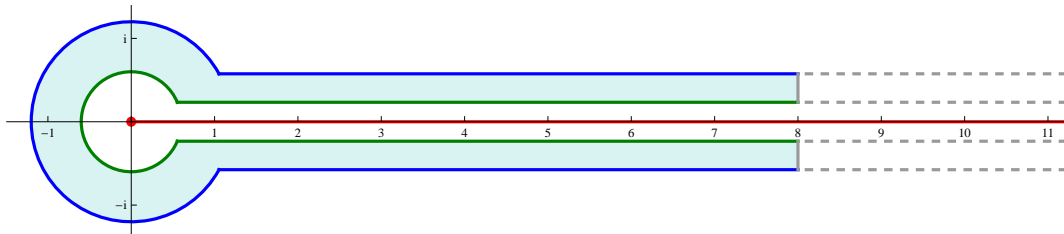
Beweis. Auf $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ ist die Funktion

$$w \mapsto \frac{\exp\left((z-1)\operatorname{Log}(-w)\right)}{\exp(w)-1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ wohldefiniert und sogar holomorph. Für $\operatorname{Re}(w) > 1$ und $|\operatorname{Im}(w)| < \pi$ gilt folgendes:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp\left((z-1)\operatorname{Log}(-w)\right)}{\exp(w)-1} \right| &\leq \frac{\exp(\operatorname{Re}(z-1)\ln|w| - \operatorname{Im}(z-1)\operatorname{Arg}(-w))}{\frac{1}{2}e^{\operatorname{Re}(w)}} \\ &\leq 2e^{-\operatorname{Re}(w)} e^{\pi|\operatorname{Im}(z)|} |w|^{\operatorname{Re}(z)-1}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass das Integral konvergiert. Mit dieser Abschätzung und dem Satz von Cauchy folgt, dass das Integral nicht abhängig ist von δ und r . Man schaue sich dazu das folgende Bild an.



Also ist

$$g(z) := \int_{\gamma_{r,\delta}} \frac{\exp\left((z-1)\operatorname{Log}(-w)\right)}{\exp(w)-1} dw$$

wohldefiniert. Die majorisierte Konvergenz erlaubt uns Integral und Ableiten bei g zu vertauschen und so die Differenzierbarkeit in z zu zeigen. Die Funktion $z \mapsto \Gamma(1-z)$ ist bekanntlich meromorph. Dann ist auch ζ meromorph als Produkt zweier meromorpher Funktionen. \square

Beweis von Theorem 13.9. Wir betrachten die Integrale I_k , definiert für $k \in \mathbb{N}^+$ durch

$$I_k := \int_{\gamma_{r,\delta}} \exp\left((z-1)\operatorname{Log}(-w) - kw\right) dw.$$

Ähnlich wie im Beweis von Lemma 13.10 findet man, dass diese Integrale wohldefiniert sind und dass I_k nicht von r und δ abhängt, jedenfalls wenn $0 < \delta < r < \pi$. Dies bedeutet,

dass

$$\begin{aligned}
 I_k &= \int_{\gamma_{r/k, \delta/k}} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-w) - kw\right) dw \\
 &= \frac{1}{k} \int_{\gamma_{r, \delta}} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-v/k) - v\right) dv \\
 &= \frac{1}{k} \exp\left((1-z) \ln k\right) \int_{\gamma_{r, \delta}} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-v) - v\right) dv \\
 &= \exp(-z \ln k) \int_{\gamma_{r, \delta}} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-v) - v\right) dv.
 \end{aligned}$$

Für $\operatorname{Re} z > 1$ ist I_k summierbar und es folgt einerseits, dass

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N I_k &= \int_{\gamma_{r, \delta}} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-w)\right) \sum_{k=1}^N \exp(-w)^k dw \\
 &= \int_{\gamma_{r, \delta}} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-w)\right) \frac{\exp(-w) - \exp(-w)^{N+1}}{1 - \exp(-w)} dw \\
 &= \int_{\gamma_{r, \delta}} \frac{\exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-w)\right)}{\exp(w) - 1} \left(1 - \exp(-w)^N\right) dw \quad (13.19)
 \end{aligned}$$

und andererseits, dass

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} I_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-z \ln k) \int_{\gamma_{r, \delta}} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-v) - v\right) dv \\
 &= \zeta(z) \int_{\gamma_{r, \delta}} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-v) - v\right) dv. \quad (13.20)
 \end{aligned}$$

Für $\delta \downarrow 0$ finden wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_{r, \delta}} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-v) - v\right) dv &= \oint_{|v|=r} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-v)\right) \exp(-v) dv + \\
 &+ \int_{x=r}^{\infty} \left(-\exp\left((z-1)(\ln(x) - \pi i)\right) + \exp\left((z-1)(\ln(x) + \pi i)\right) +\right) \exp(-x) dx. \quad (13.21)
 \end{aligned}$$

Weil $\exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-v)\right) \exp(-v)$ beschränkt ist für $\operatorname{Re}(z) > 1$, folgt

$$\lim_{r \downarrow 0} \oint_{|v|=r} \exp\left((z-1) \operatorname{Log}(-v)\right) \exp(-v) dv = 0. \quad (13.22)$$

Auch findet man

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \downarrow 0} \int_{x=r}^{\infty} \left(-\exp\left((z-1)(\ln(x) - \pi i)\right) + \exp\left((z-1)(\ln(x) + \pi i)\right) +\right) \exp(-x) dx \\
 &= \int_{x=0}^{\infty} \exp\left((z-1) \ln(x)\right) 2i \sin((z-1)\pi) \exp(-x) dx \\
 &= 2i \sin((z-1)\pi) \int_{x=0}^{\infty} \exp\left((z-1) \ln(x)\right) \exp(-x) dx \\
 &= 2i \sin((z-1)\pi) \Gamma(z) = -2i \sin(z\pi) \Gamma(z) = \frac{-2\pi i}{\Gamma(1-z)}. \quad (13.23)
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir Lemma 13.4 verwendet: $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Aus (13.21), (13.22) und (13.23) folgt

$$\int_{\gamma_{r,\delta}} \exp\left((z-1)\operatorname{Log}(-v) - v\right) dv = \frac{-2\pi i}{\Gamma(1-z)}. \quad (13.24)$$

Kommen wir zurück auf (13.19). Weil das Integral in (13.19) nicht von r und δ abhängt, wenn $0 < \delta < r < \pi$, folgt

$$\int_{\gamma_{r,\delta}} \frac{\exp((z-1)\operatorname{Log}(-w))}{\exp(w)-1} \exp(-w)^N dw = \int_{\gamma_{\frac{r}{N}, \frac{\delta}{N}}} \frac{\exp((z-1)\operatorname{Log}(-w))}{\exp(w)-1} \exp(-w)^N dw,$$

und es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{\frac{r}{N}, \frac{\delta}{N}}} \frac{\exp\left((z-1)\operatorname{Log}(-w)\right)}{\exp(w)-1} \exp(-w)^N dw = 0. \quad (13.25)$$

Um (13.25) zu zeigen betrachtet man die drei Teilkurven getrennt und findet, dass dieses Integral von Ordnung $\mathcal{O}(N^{-\operatorname{Re}(z-1)})$ ist.

Dies liefert uns

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_k = \int_{\gamma_{r,\delta}} \frac{\exp\left((z-1)\operatorname{Log}(-w)\right)}{\exp(w)-1} dw. \quad (13.26)$$

Kombinieren wir (13.26) und (13.20), so folgt

$$\int_{\gamma_{r,\delta}} \frac{\exp\left((z-1)\operatorname{Log}(-w)\right)}{\exp(w)-1} dw = \zeta(z) \int_{\gamma_{r,\delta}} \exp\left((z-1)\operatorname{Log}(-v) - v\right) dv \quad (13.27)$$

Das gewünschte Ergebnis folgt aus (13.27) und (13.24). \square

Definition 13.11. Man definiert für $\sigma \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \sigma \leq 1$ und $\sigma \notin \mathbb{N}^+$ die Erweiterung der Riemann- ζ Funktion durch die rechte Seite in (13.18).

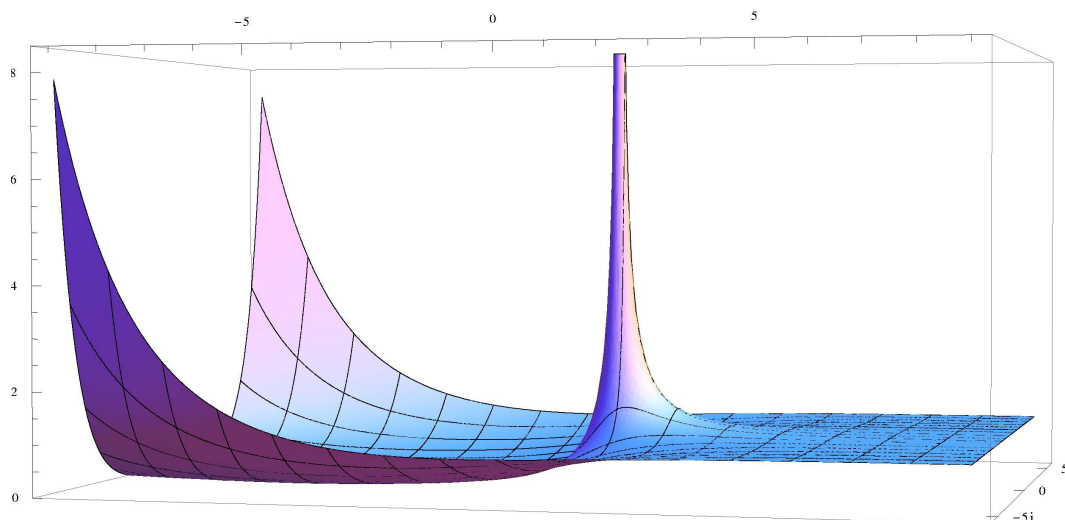


Abbildung 13.2: Die Funktionenlandschaft zur Riemann- ζ -Funktion

Theorem 13.12 (Leonhard Euler, 1707-1783). Sei $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ die Menge der Primzahlen. Für $s > 1$ gilt

$$\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s).$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ gilt

$$\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \exp(-z \ln p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-z \ln n) = \zeta(z).$$

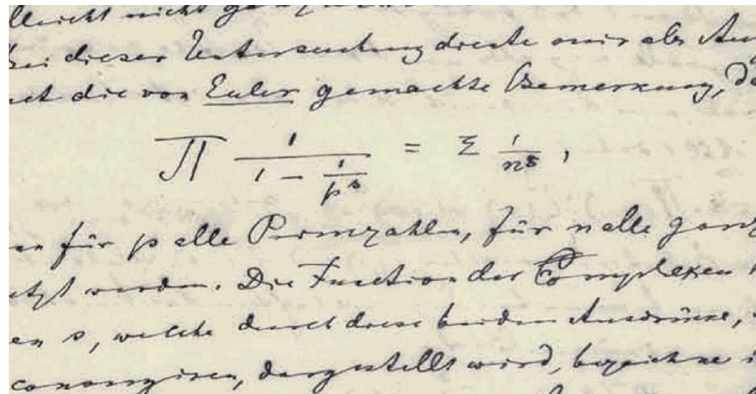


Abbildung 13.3: Kopie der Handschrift von Riemann aus 1859.

Beweis. Man erinnere sich, dass

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m = \frac{1}{1 - \alpha} \quad \text{für } |\alpha| < 1.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \prod_{p \in \{p_1, \dots, p_k\}} \frac{1}{1 - p^{-s}} &= \frac{1}{1 - p_1^{-s}} \frac{1}{1 - p_2^{-s}} \cdots \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} (p_1^{-s})^{m_1} \sum_{m_2=0}^{\infty} (p_2^{-s})^{m_2} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} (p_k^{-s})^{m_k} = \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} (p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k})^{-s} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^+ \text{ dessen} \\ \text{Primfaktorzerlegung} \\ \text{nur } p_1, \dots, p_k \text{ enthält.}}} n^{-s}. \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung wird verwendet, dass jede Zahl $n \in \mathbb{N}^+$ eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren hat.

Lässt man $k \rightarrow \infty$ gehen, dann folgt die Behauptung. Weil $p \in \mathbb{R}^+$ gilt, kann man $s \in (1, \infty)$ durch $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ ersetzen. Man soll bemerken, dass die ganzen Zahlen m_i erlauben, die Potenzrechnung durchzuführen:

$$\begin{aligned} &(\exp(-z \ln p_1))^{m_1} \cdots (\exp(-z \ln p_2))^{m_2} = \\ &= \exp(-z(m_1 \ln p_1 + \dots + m_2 \ln p_2)) = \exp(-z \ln(p_1^{m_1} \cdots p_2^{m_2})). \end{aligned}$$

□

Vermutung 13.13 ('The Riemann Hypothesis'). *Außer den trivialen Nullstellen $\{-2, -4, -6, \dots\}$ hat die Riemannsche ζ -Funktion nur Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.*

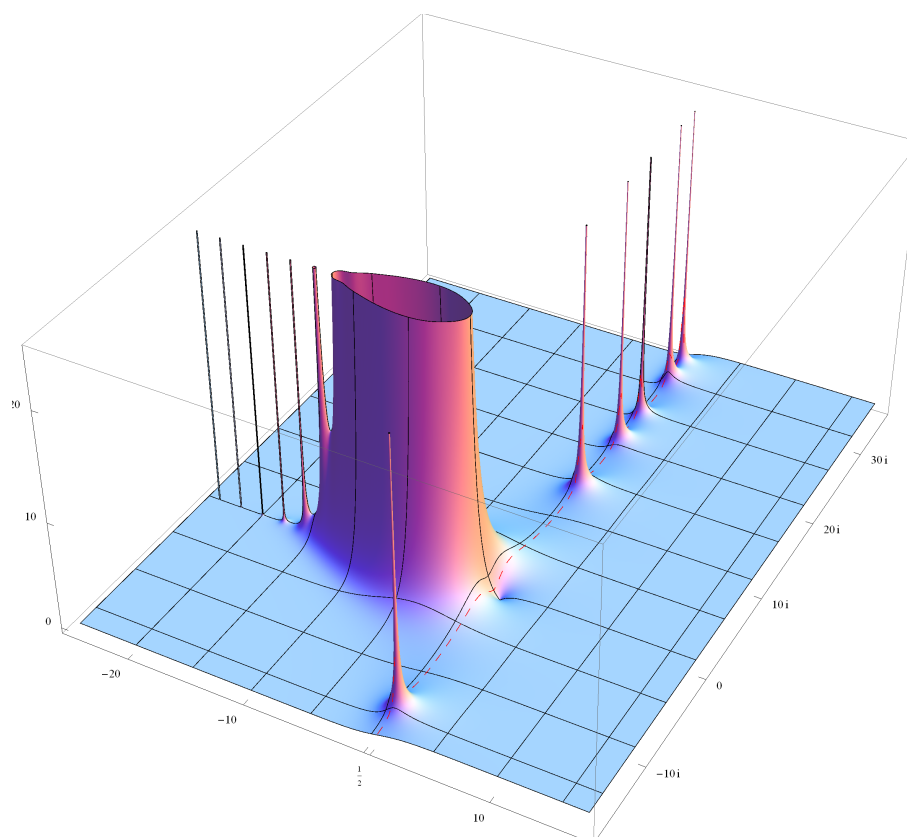


Abbildung 13.4: Die Funktionenlandschaft zu $z \mapsto 1/\zeta(z)$. Die Nullstellen der Riemann-Zeta Funktion liefern leicht erkennbare Polstellen.

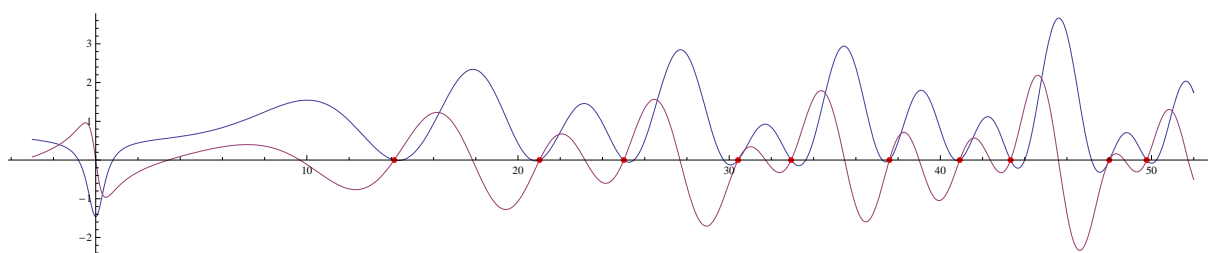


Abbildung 13.5: Skizzen zu den Funktionen $t \mapsto \operatorname{Re}(\zeta(\frac{1}{2} + it))$ und $t \mapsto \operatorname{Im}(\zeta(\frac{1}{2} + it))$.

Bemerkung 13.13.1. Wenn man instande ist diese Vermutung zu beweisen, sollte man sich schleunigst melden bei:

<http://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis>

Regelmäßig gibt es Mathematiker, die behaupten, dass sie diese Vermutung bewiesen haben. Bis heute hat jedoch noch keiner dieser angeblichen Beweise bestehen können. Die \$1.000.000 liegen noch bereit.

13.3 Die Weierstraßsche \wp -Funktionen

Funktionen wie \sin , \cos , \tan , \cosh , \sinh , \tanh sind meromorph und periodisch:

$$\begin{aligned}\sin(z + 2\pi) &= \sin(z) \text{ und } \cos(z + 2\pi) = \cos(z), \\ \tan(z + \pi) &= \tan(z), \\ \sinh(z + 2\pi i) &= \sinh(z) \text{ und } \cosh(z + 2\pi i) = \cosh(z), \\ \tan(z + \pi i) &= \tan(z).\end{aligned}$$

Man könnte auch eine Funktion definieren, die die Periode $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat:

$$f(z) = \sin\left(\frac{2\pi}{w}z\right).$$

Es gibt viele andere Funktionen mit gleicher Periode: Zum Beispiel

$$f(z) = \left(\sin\left(\frac{2\pi}{w}z\right)\right)^3 + \exp\cos\left(\frac{2\pi}{w}z\right).$$

Es ist leicht eine Funktion zu finden, die in zwei Richtungen periodisch ist. Zum Beispiel

$$f(z) = \sin(\operatorname{Re}(z)) \cos(\operatorname{Im}(z))$$

wäre eine solche Funktion. man sieht jedoch sofort, dass diese Funktion nicht holomorph und sogar nicht meromorph ist. Bevor wir periodische Funktionen auf \mathbb{C} betrachten werden, schauen wir uns die periodischen Funktionen auf \mathbb{R} an

Periodische Funktionen auf \mathbb{R} haben immer nur eine (kleinste) Periode².

Lemma 13.14. *Wenn eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodisch ist, sowohl bezüglich $p_1 \in \mathbb{R}^+$ als auch $p_2 \in \mathbb{R}^+$, dann gilt $f = c$ oder es gibt $p_0 \in \mathbb{R}^+$ derart, dass f ist periodisch mit Periode $p_0 \in \mathbb{R}^+$ und $p_1/p_0, p_2/p_0 \in \mathbb{N}^+$.*

Bemerkung 13.14.1. Wenn so ein p_0 existiert, dann gilt

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 = 0$$

für $n_1 = p_2/p_0$ und $n_2 = -p_1/p_0$.

Bemerkung 13.14.2. Der Beweis funktioniert sogar für Funktionen, die unstetig sind, wenn die Unstetigkeitsstellen sich nicht häufen.

Beweis. Nehme an, dass $p_2 < p_1$. Betrachte $p_3 = p_1 - [p_1/p_2]p_2$. Hier ist $[.]$ die Ganzzahlfunktion:

$$[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}.$$

Dann gilt entweder $p_3 = 0$ und $p_1/p_2 = [p_1/p_2]$, $p_2/p_2 = 1 \in \mathbb{N}$ oder f ist auch periodisch mit Periode $p_3 < p_2$.

Wenn $p_3 \neq 0$ definiere man $p_4 = p_2 - [p_2/p_3]p_3$. Dann gilt entweder $p_4 = 0$ und $p_2/p_3 = [p_2/p_3]$, $p_1/p_3 = 1 - [p_1/p_2]p_2/p_3 \in \mathbb{N}$ oder f ist auch periodisch mit Periode $p_4 < p_3$. Man wiederhole dies. Entweder findet man endlich viele

$$0 = p_n < p_{n-1} < \cdots < p_2 < p_1,$$

² f ist periodisch bezüglich p , wenn $f(x+p) = f(x)$.

oder unendlich viele

$$0 < \dots < p_n < p_{n-1} < \dots < p_2 < p_1.$$

Im ersten Fall gilt f hat Periode p_n und $p_1/p_0, p_2/p_0 \in \mathbb{N}$. Im zweiten Fall konvergiert p_n gegen 0. (Wieso?) Wenn p_n gegen 0 konvergiert, dann gilt $f(x) = f(0)$ auf einer dichten Menge. Aus der Stetigkeit folgt $f(x) = f(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. \square

Für Funktionen auf \mathbb{C} wollen wir untersuchen, ob es Funktionen gibt, die in mehreren Richtungen periodisch sind. Ähnlich wie Lemma 13.14 zeigt man folgendes:

Lemma 13.15. *Wenn eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ periodisch bezüglich $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, dann gilt $f = c$ oder es gibt $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle 0, mit*

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0.$$

Beweis. Nehme an $|p_3| \leq |p_2| \leq |p_1|$. Wenn p_1 und p_2 auf einer Geraden durch 0 liegen, kann man Lemma 13.14 verwenden für $t \mapsto \operatorname{Re}(f(tp_1))$. Diese Funktion ist periodisch mit Perioden 1 und $p_2/p_1 \in \mathbb{R}$. Aus Lemma 13.14 folgt dann, dass es $p_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit $1/p_0, p_2/(p_1 p_0) \in \mathbb{N}^+$. Für $n_1 = p_2/(p_1 p_0), n_2 = -1/p_0$ und $n_3 = 0$ folgt $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0$. Gleiches kann man folgern, wenn p_1 und p_3 , oder p_2 und p_3 auf einer Geraden durch 0 liegen.

Wir dürfen also annehmen, dass die Gerade durch zwei dieser p_i nicht durch 0 geht. Diese Annahme liefert uns, dass $\operatorname{Im}(p_1/p_3) \neq 0$ und $\operatorname{Im}(p_2/p_3) \neq 0$. Wie im Beweis von Lemma 13.14 zeigt man, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein Paar $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$\left| m_1 \operatorname{Im}\left(\frac{p_1}{p_3}\right) + m_2 \operatorname{Im}\left(\frac{p_2}{p_3}\right) \right| < \varepsilon,$$

also auch für $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Die Zahl $m_1 \operatorname{Re}(p_1/p_3) + m_2 \operatorname{Re}(p_2/p_3)$ runden wir ab auf die nächstliegende ganze Zahl m_3 und wir definieren

$$p_4 := m_1 p_1 + m_2 p_2 - m_3 p_3.$$

Wenn $p_4 = 0$ gilt, sind wir fertig. Wenn $p_4 \neq 0$, dann ist f periodisch mit Periode p_4 und

$$\begin{aligned} |p_4| &= \left| m_1 \frac{p_1}{p_3} + m_2 \frac{p_2}{p_3} - m_3 \right| |p_3| \\ &\leq \left(\left| \operatorname{Re}\left(m_1 \frac{p_1}{p_3} + m_2 \frac{p_2}{p_3} - m_3\right) \right| + \left| \operatorname{Im}\left(m_1 \frac{p_1}{p_3} + m_2 \frac{p_2}{p_3} - m_3\right) \right| \right) |p_3| \\ &= \left(\left| m_1 \operatorname{Re}\left(\frac{p_1}{p_3}\right) + m_2 \operatorname{Re}\left(\frac{p_2}{p_3}\right) - m_3 \right| + \left| \operatorname{Im}\left(m_1 \frac{p_1}{p_3} + m_2 \frac{p_2}{p_3}\right) \right| \right) |p_3| \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) |p_3| = \frac{3}{4} |p_3|. \end{aligned}$$

Man wiederholt diesen Vorgang mit p_4, p_3, p_2 etc. Man findet entweder nach endlich vielen Schritten $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ wie beschrieben oder man findet eine Folge von Perioden $p_k \in \mathbb{C}$, die nach 0 konvergieren. Weil meromorphe Funktionen nur Polstellen ohne Häufungspunkt haben, kann f in diesem Fall keine Polstelle haben. Das bedeutet, dass f holomorph ist. Weil $p_k \rightarrow 0$ und $f(p_k) = f(0)$ folgt aus dem Identitätssatz (Theorem 7.7), dass f konstant ist. \square

Meromorphe Funktionen auf \mathbb{C} haben also höchstens zwei reell unabhängigen komplexen Perioden $p_1, p_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

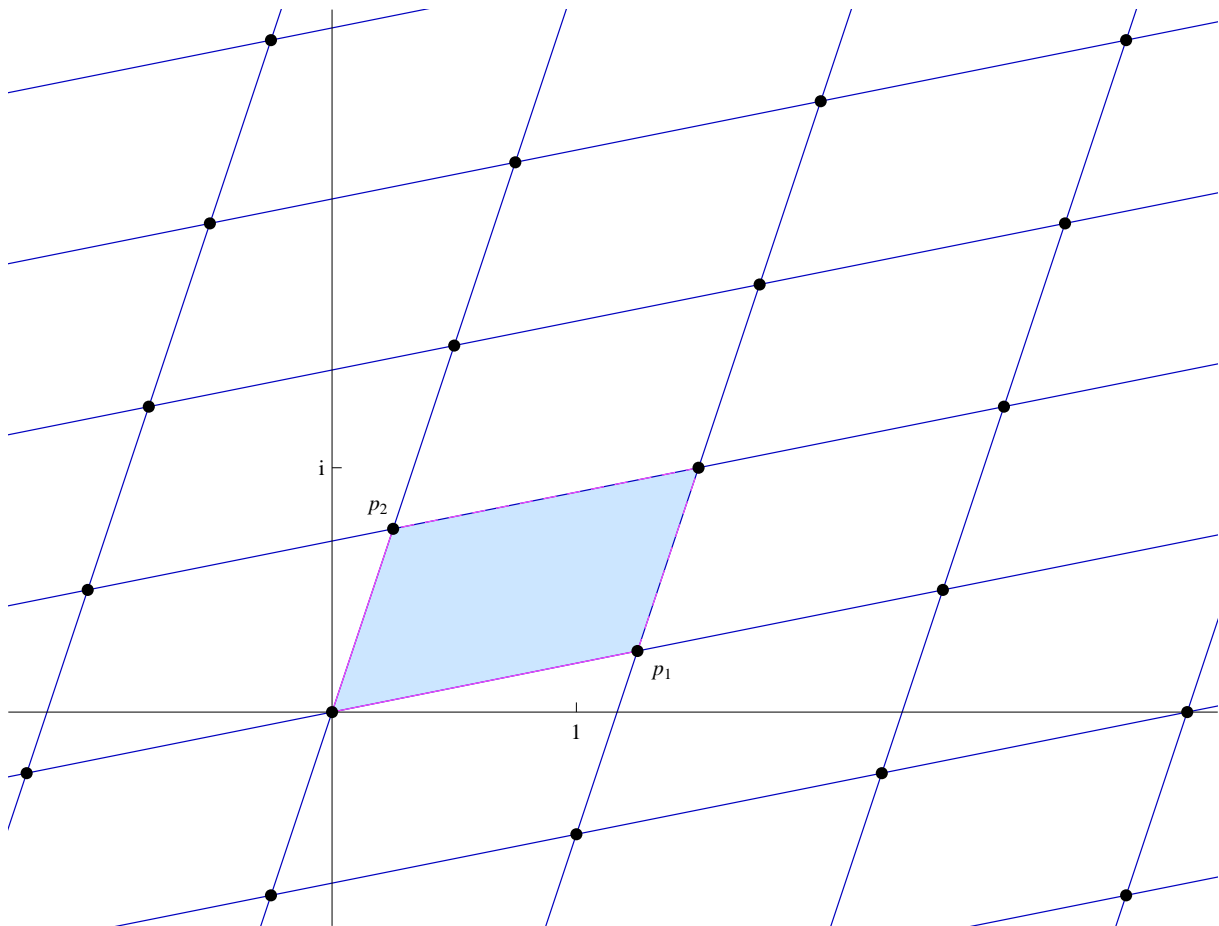


Abbildung 13.6: Skizze zu einem Periodengitter.

Definition 13.16. Eine meromorphe Funktion mit zwei reell unabhängigen³ komplexen Perioden $p_1, p_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißt elliptische Funktion.

Bemerkung 13.16.1. Für eine solche Funktion gilt

$$f(z + n_1 p_1 + n_2 p_2) = f(z) \text{ für alle } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Die Menge $\{n_1 p_1 + n_2 p_2; n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ nennt man ein Gitter.

Lemma 13.17. Eine holomorphe Funktion, die elliptisch ist, ist konstant.

Beweis. Holomorph und periodisch in zwei reell unabhängigen Richtungen geben Beschränktheit. Der Satz von Liouville liefert uns, dass f konstant ist. \square

Lemma 13.18. Sei f eine elliptische Funktion mit Perioden p_1, p_2 , die in

$$D = \{\theta_1 p_1 + \theta_2 p_2; 0 \leq \theta_1 < 1 \text{ und } 0 \leq \theta_2 < 1\}$$

die Polstellen $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ hat. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k}(f) = 0.$$

³Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind reell unabhängig, wenn $c_1 z_1 + c_2 z_2 = 0$ als einzige reelle Lösung $c_1 = c_2 = 0$ hat.

Bemerkung 13.18.1. Es gibt also keine elliptische Funktionen mit einem einfachen Pol auf D .

Beweis. Man betrachte eine (stückweise glatte) Kurve γ , die den Rand vom Spat D durchläuft. Wenn es auf diesem Rand eine Polstelle gibt, dann verschiebt man diesen Spat und betrachtet stattdessen $w + D$ mit $w \in \mathbb{C}$ so gewählt, dass $w + \partial D$ keine Polstelle enthält. Siehe Abbildung 13.7. Durch die Periodizität folgt, dass das Integral über die linke Kurve und über die rechte Kurve gegensetzte Werte liefern und ähnliches gilt für oben und unten. Wir finden:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z \in w + \partial D} f(z) dz = 0. \quad \square$$

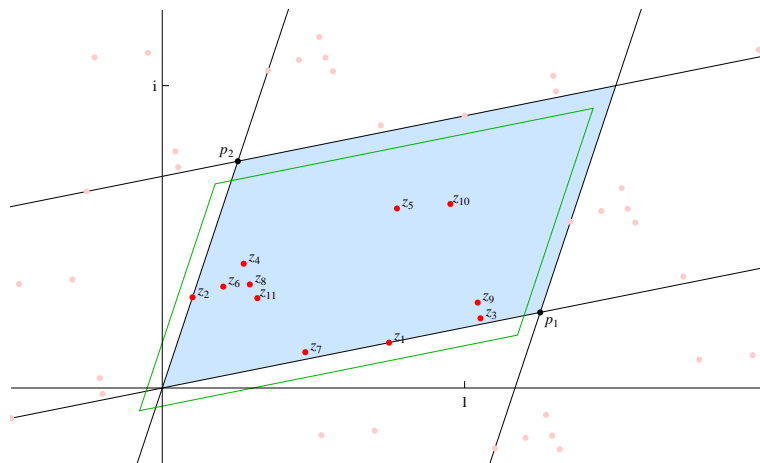


Abbildung 13.7: Skizze zum Beweis von Lemma 13.18.

Lemma 13.19. Eine elliptische Funktion f mit Perioden $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$ nimmt in

$$D = \{\theta_1 p_1 + \theta_2 p_2; 0 \leq \theta_1 < 1 \text{ und } 0 \leq \theta_2 < 1\}$$

jeden Wert aus $\widehat{\mathbb{C}}$ gleich oft an. (Man soll inklusive Vielfachkeiten zählen.)

Beweis. Man erinnere sich an Lemma 11.9:

$$\#_N(f, \Gamma) - \#_P(f, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Hier ist $\#_N(f, \Gamma)$ die Zahl der Nullstellen innerhalb von $\Gamma = \text{Bild}(\gamma)$ mit γ eine geschlossene Jordan-Kurve. Ähnlich ist $\#_P(f, \Gamma)$ die Zahl der Polstellen innerhalb von Γ . Weil auch f'/f elliptisch ist, folgt

$$\#_N(f, \Gamma) - \#_P(f, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z \in w + \partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{\text{Polstellen } z_k \text{ von } f'/f \\ \text{innerhalb } w + \partial D}} \operatorname{Res}_{z_k}(f'/f) = 0.$$

Wir können auch $f - c$ auf gleicher Art angehen und finden

$$\#_N(f - c, \Gamma) = \#_P(f - c, \Gamma) = \#_P(f, \Gamma).$$

Das bedeutet, dass f den Wert c gleich oft annimmt als diese Funktion Polstellen hat. \square

Theorem 13.20. Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ reell unabhängig. Dann ist die Funktion $z \mapsto \wp(z; p_1, p_2)$ mit

$$\wp(z; p_1, p_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z - n_1 p_1 - n_2 p_2)^2} - \frac{1}{(n_1 p_1 + n_2 p_2)^2} \right)$$

eine elliptische Funktion.

Bemerkung 13.20.1. Dieser Buchstabe \wp ist ein kalligraphisches p und wird nur für diese Funktionen verwendet.

Beweis. Erstens sollen wir zeigen, dass diese Funktion wohldefiniert ist. Das heißt, die Folge soll kompakt konvergieren. Im Spat S_M mit den Winkeln $\pm M p_1 \pm M p_2$ liegen $4[M]^2$ Polstellen. Das bedeutet für $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ mit $|n_1| > M$ oder $|n_2| > M$ sind die Termen in dieser Reihe holomorph auf S_M . Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{|n_1| > M \text{ oder } |n_2| > M} \left| \frac{1}{(z - n_1 p_1 - n_2 p_2)^2} - \frac{1}{(n_1 p_1 + n_2 p_2)^2} \right| \leq \\ & \leq \sum_{|n_1| > M \text{ oder } |n_2| > M} \left| \frac{-z^2 + 2z(n_1 p_1 + n_2 p_2)}{(z - n_1 p_1 - n_2 p_2)^2 (n_1 p_1 + n_2 p_2)^2} \right| \leq \\ & \leq C \sum_{|(n_1, n_2)| > M/2} \frac{1}{|(n_1, n_2)|^3} \leq \tilde{C} \int_{n=\frac{1}{2}M} \frac{1}{n^3} n \, dn \leq \hat{C}. \end{aligned}$$

Um die Periodizität zu zeigen, betrachten wir die Ableitung. Wenn z kein Gitterpunkt ist, zeigt man, dass

$$\wp'(z; p_1, p_2) = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} \frac{-2}{(z - n_1 p_1 - n_2 p_2)^3}.$$

Weil es keine konstante Termen mehr gibt, kann man sofort erkennen, dass diese Funktion $z \mapsto \wp'(z; p_1, p_2)$ periodisch ist mit Periode p_1 und p_2 . Also folgt für jedes p im Gitter, dass

$$\frac{d}{dz} (\wp(z + p; p_1, p_2) - \wp(z; p_1, p_2)) = \wp'(z + p; p_1, p_2) - \wp'(z; p_1, p_2) = 0.$$

Dies ergibt, dass

$$\wp(z + p; p_1, p_2) - \wp(z; p_1, p_2) = c_p.$$

Bemerke, dass die Gitterpunkte genau die Polstellen sind. Für $p \in \{p_1, p_2\}$ ist $-\frac{1}{2}p$ also keine Polstelle, und nehmen wir $z = -\frac{1}{2}p$ nehmen, so folgt

$$\wp\left(\frac{1}{2}p; p_1, p_2\right) - \wp\left(-\frac{1}{2}p; p_1, p_2\right) = c_p.$$

Weil $\wp(z; p_1, p_2) = \wp(-z; p_1, p_2)$ folgt $c_p = 0$ für $p \in \{p_1, p_2\}$ und dies zeigt, dass $\wp(z; p_1, p_2)$ periodisch ist mit Perioden p_1 und p_2 . \square

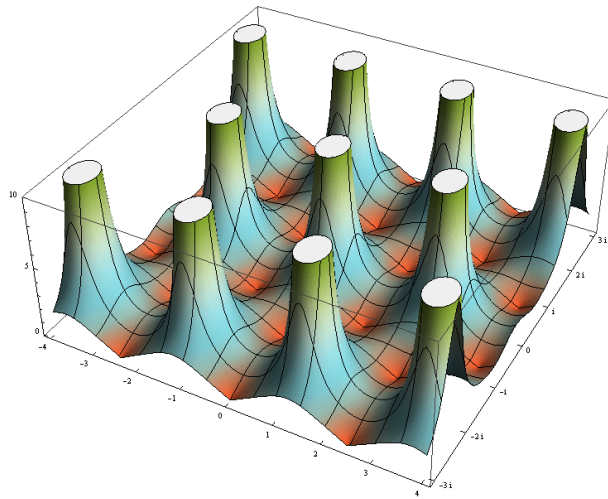


Abbildung 13.8: Die Funktionenlandschaft zu einer $\varphi(\cdot; p_1, p_2)$.

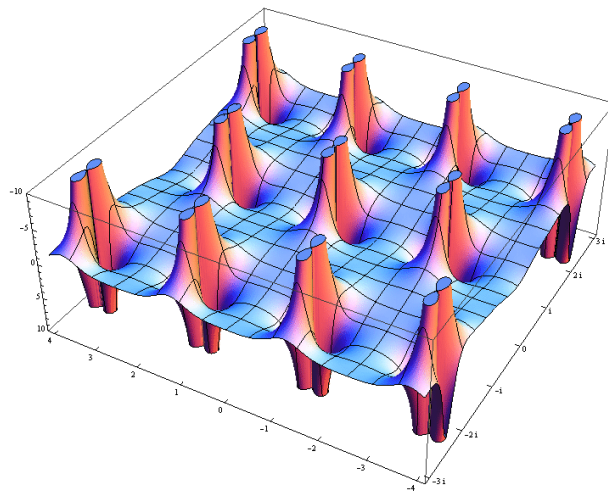


Abbildung 13.9: Skizze zu $\operatorname{Re}(\varphi(\cdot; p_1, p_2))$.

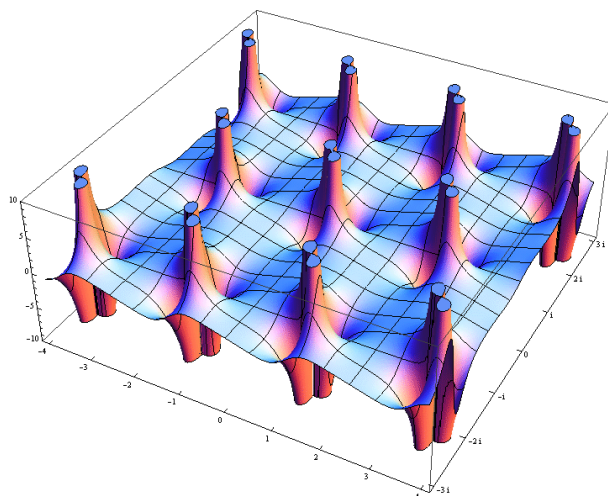


Abbildung 13.10: Skizze zu $\operatorname{Im}(\varphi(\cdot; p_1, p_2))$.

Funktionentheorie, Woche 14



Konvergenz und Folgen

14.1 Gleichmäßige Konvergenz

Eine Zahlenfolge $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergiert, wenn es ein $\ell \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n > N_\varepsilon \implies |\alpha_n - \ell| < \varepsilon.$$

Auch zu Folgen von Funktionen $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kann man Konvergenz betrachten wie man schon gesehen hat. Wir betonen nochmals einige Definitionen. Wir schreiben $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Die Menge U ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^m oder \mathbb{C}^m .

Definition 14.1. Seien $f_n : U \rightarrow \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N}$. Man sagt $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, wenn es $\ell : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \forall z \in U \exists N_{\varepsilon, z} \in \mathbb{N} \forall n > N_{\varepsilon, z} \implies |f_n(z) - \ell(z)| < \varepsilon.$$

Definition 14.2. Seien $f_n : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Man sagt $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig, wenn es $\ell : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall z \in U \forall n > N_\varepsilon \implies |f_n(z) - \ell(z)| < \varepsilon.$$

Wenn eine Funktionenfolge konvergiert, kann man wenig aussagen über die Grenzfunktion. Wenn die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert, weiss man schon viel mehr:

- Wenn f_n gleichmäßig zu ℓ konvergiert und die f_n sind stetig, dann ist auch ℓ stetig:

$$|\ell(x) - \ell(y)| \leq |\ell(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - \ell(y)|$$

Für $\varepsilon > 0$ nehme man: $n_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass für $n > n_1$ und jedes $x \in U$ gilt $|\ell(x) - f_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ und $\delta > 0$ derart, dass für $|x - y| < \delta$ gilt

$$|f_{n_1+1}(x) - f_{n_1+1}(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

- Die Funktionen $f_n(x) = \arctan(nx)$ sind stetig und konvergieren nach $\ell(x) = \frac{1}{2}\pi \operatorname{sign}(x)$. Die Funktion ℓ ist nicht stetig in 0. Bemerke, dass $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Definition 14.3. Eine Familie $\mathcal{F} = \{f_\nu\}_{\nu \in I}$ von Funktionen $f_\nu : U \rightarrow \mathbb{K}$ nennt man gleichgradig stetig in $x \in U$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 : |y - x| < \delta_{x,\varepsilon} \implies |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon.$$

Bemerkung 14.3.1. „ \mathcal{F} ist gleichgradig stetig auf U “ heißt dann:

$$\forall x \in U \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 : |y - x| < \delta_{x,\varepsilon} \implies |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon.$$

Gleichgradig stetig ist eigentlich selten nützlich, wenn man gleichzeitig nicht auch die gleichmäßige Stetigkeit hat.

Definition 14.4. Eine Familie $\mathcal{F} = \{f_\nu\}_{\nu \in I}$ von Funktionen $f_\nu : U \rightarrow \mathbb{K}$ nennt man gleichgradig gleichmäßig stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |y - x| < \delta_\varepsilon \implies |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon. \quad (14.1)$$

Theorem 14.5 (Arzelà-Ascoli¹). Sei $K \subset \mathbb{K}^n$ kompakt und sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : K \rightarrow \mathbb{K}$ gleichgradig gleichmäßig stetig und beschränkt. Dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{f_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Beweis. Die einzelnen Schritte des Beweises sind die folgenden:

- Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge.** Weil K kompakt ist, hat K eine abzählbare dichte² Teilmenge. Denn aus jeder Überdeckung $\mathcal{U}_k := \{B_{2^{-k}}(x); x \in K\}$ kann man endlich viele $\{B_{2^{-k}}(x_{k,\ell})\}_{\ell=1}^{\ell_k}$ wählen, die K schon überdecken. Die abzählbare Menge $T := \{x_{k,\ell}; 1 \leq \ell \leq \ell_k, k \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in K .
- Konvergenz in abzählbar vielen Punkten.** Wir schreiben $T = \{x_k\}_{k=1}^\infty$. Weil die Folge $\{f_n(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilmenge $\{f_{1,n_k}(x_1)\}_{k \in \mathbb{N}}$ (der Satz von Bolzano-Weierstraß). Weil $\{f_{1,n_k}(x_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilmenge $\{f_{2,n_k}(x_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$, usw. Nach n Schritten haben wir eine Teilfolge, die konvergiert auf $\{x_1, \dots, x_n\}$. Mit Hilfe des sogenannten Diagonalverfahrens bekommt man eine Teilfolge $\{f_{m,n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, die konvergiert auf T . Wir setzen

$$f_{n_m} := f_{m,n_m}$$

und definieren

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(x) \text{ für } x \in T.$$

- Konvergenz auf dem Ganzen.** Für $x \in K \setminus T$ gibt es eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ mit $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Dann ist $\{f(x_n)\}$ eine Cauchy-Folge:

$$|f(x_n) - f(x_k)| \leq |f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| + |f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(x_k)| + |f_{n_m}(x_k) - f(x_k)|.$$

Hier wird die gleichgradige Stetigkeit verwendet: Für $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_{\varepsilon/3} > 0$ derart, dass $|x_n - x_k| < \delta_{\varepsilon/3}$ impliziert $|f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(x_k)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Man nehme m genügend groß für $|f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ und $|f_{n_m}(x_k) - f(x_k)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Cauchy-Folgen in \mathbb{R} oder \mathbb{C} sind konvergent. Wenn es zwei Folgen gibt mit $x_n \rightarrow x$ und $\tilde{x}_n \rightarrow x$, dann gilt auch hier

$$|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \leq |f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| + |f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(\tilde{x}_n)| + |f_{n_m}(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_n)|,$$

¹Cesare Arzelà (1847-1912) und Giulio Ascoli (1843-1896)

²Eine Teilmenge $T \subset K$ heißt dicht, wenn es zu jedem $x \in K$ eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ gibt, die nach x konvergiert.

und man findet ähnlich wie soeben, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n)$. Das bedeutet

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \text{ für } T \ni x_n \rightarrow x \in K \setminus T$$

ist wohldefiniert.

4. **Gleichmäßige Stetigkeit der Grenzfunktion.** Auch gilt, dass f gleichmäßig stetig ist: Seien $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ derart, dass $T \ni x_n \rightarrow x$ und $T \ni y_n \rightarrow y$. Sei $\varepsilon > 0$. Man verwende:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| + |f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(y_n)| + \\ &\quad + |f_{n_m}(y_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - f(y)|. \end{aligned}$$

Wenn man n genügend groß nimmt, folgt $|x_n - y_n| < 2|x - y|$. Man nehme $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass $|x - y| < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ impliziert $|f_{n_m}(x) - f_{n_m}(y)| < \frac{1}{5}\varepsilon$. Auch nehme man n so groß, dass $|f(x) - f(x_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$ und $|f(y_n) - f(y)| < \frac{1}{5}\varepsilon$. Durch m genügend groß zu nehmen findet man $|f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$ und $|f_{n_m}(y_n) - f(y_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$.

5. **Gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge.** Die gleichmäßige Konvergenz folgt aus der Kompaktheit von K : Wenn f_{n_m} nicht gleichmäßig konvergiert, dann gibt es $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge n_{m_k} mit $x_k \in K$ und $|f_{n_{m_k}}(x_k) - f(x_k)| > \varepsilon_0$. Die Folge x_k hat eine konvergente Teilfolge $x_{k_\ell} \rightarrow \tilde{x}$. Sei $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ eine Folge mit $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$ und man findet

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &< \left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(x_{k_\ell}) - f(x_{k_\ell}) \right| \leq \\ &\leq \left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(x_{k_\ell}) - f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) \right| + \left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_n) \right| + |f(\tilde{x}_n) - f(x_{k_\ell})|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite bekommt man so klein wie man möchte und so einen Widerspruch: Man nehme ℓ und n so groß, dass $|f(\tilde{x}_n) - f(x_{k_\ell})| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$ und $|f(\tilde{x}_n) - f(x_{k_\ell})| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$.

Für ℓ genügend groß, folgt $|f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_n)| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$. \square

Theorem 14.6 (Montel³). Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und lokal gleichmäßig beschränkt. Dann gibt es eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{f_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Beweis. Sei $\overline{B_{2R}(w)} \subset G$ und sei $M > 0$ derart, dass $|f_n| \leq M$ auf $\overline{B_{2R}(w)}$. Es gilt für $z_1, z_2 \in \overline{B_R(w)}$, dass

$$\begin{aligned} |f_n(z_1) - f_n(z_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=2R} \left(\frac{f_n(z)}{z-z_1} - \frac{f_n(z)}{z-z_2} \right) dz \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=2R} \frac{z_1 - z_2}{(z-z_1)(z-z_2)} f_n(z) dz \right| \leq \\ &\leq \frac{|z_2 - z_1|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} |f_n(w + R e^{it})| R dt \leq \frac{M}{R} |z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

Also ist $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig gleichmäßig stetig auf $\overline{B_R(w)}$. Mit dem Satz von Arzelà-Ascoli folgt das Ergebnis. \square

³Paul Montel 1876-1975

Theorem 14.7 (Weierstraß). Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f holomorph. Außerdem konvergiert $f_n^{(k)}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.

Beweis. Sei γ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in G mit Innengebiet in G . Weil

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz = 0$$

und weil f_n gleichmäßig konvergiert, folgt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0.$$

Mit Theorem 4.1 folgt, dass f eine Stammfunktion hat auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $\tilde{G} \subset G$. Weil diese Stammfunktion holomorph ist auf \tilde{G} , ist f holomorph auf \tilde{G} und darum auch auf G .

Für die lokal gleichmäßige Konvergenz von f'_n betrachte man die Ableitung mit der Integralformel von Cauchy (Korollar 5.7) für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$:

$$f'(z) - f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) - f_n(w)}{(w - z)^2} dw.$$

Für jede Kreisscheibe $B_r(z_0)$ in G folgt so aus gleichmäßiger Konvergenz von $f_n \rightarrow f$ auf $B_r(z_0)$ die gleichmäßige Konvergenz von $f'_n \rightarrow f'$ auf $B_\rho(z_0)$ mit $\rho < r$. Für höhere Ableitungen wiederhole man dieses Argument. \square

14.2 Beweis des Riemannsches Abbildungssatzes

Der Riemannsches Abbildungssatz (Theorem 10.8) lautet:

Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $h : \mathbb{R} + i\mathbb{R}^+ \rightarrow G$.

Man kann ihn noch etwas genauer formulieren wenn wir statt $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$ den Einheitskreis $B_1(0)$ nehmen und die inverse Abbildung betrachten:

$$f : G \rightarrow B_1(0).$$

Die Abbildung $g_0(z) = \frac{i-z}{i+z}$ ist biholomorph von $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ auf $B_1(0)$. Das heißt, wenn wir biholomorphe Funktion f kennen, kennen wir auch eine biholomorphe Funktion h , denn

$$h = f^{\text{invers}} \circ g_0^{\text{invers}}.$$

Theorem 14.8 (Der Riemannsches Abbildungssatz auf $B_1(0)$). Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow B_1(0)$. Sei $z_0 \in G$. Wenn man $f(z_0) = 0$ und $\text{Arg}(f'(z_0)) \in (-\pi, \pi]$ vorschreibt, gibt es genau eine solche Abbildung f .

Beweis. Auch hier gibt es einen Beweis in mehreren Schritten.

1. Der erste Schritt im Beweis ist die Konstruktion einer biholomorphen Abbildung f_0 , die G abbildet auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\tilde{G} := f_0(G) \subset B_1(0)$ und mit $0 \in \tilde{G}$.

Weil $G \neq \mathbb{C}$ gibt es $a \in G^c = \mathbb{C} \setminus G$. Weil G einfach zusammenhängend ist, gibt es einen Weg von a nach ∞ . Dann kann man $\text{Log}^*(z - a)$ als holomorphe Funktion auf G definieren wenn man genau diesen Weg als Schnitt für den Logarithmus verwendet ($\text{Log}^*(z - a) = \text{Log}(z - a) + 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{N}$). Die Abbildung

$$g_1 : z \mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\text{Log}^*(z - a)\right)$$

bildet G biholomorph ab auf $G_1 = g_1(G)$ und $\mathbb{C} \setminus G_1$ enthält eine offene Kreisscheibe $B_r(w)$: Wenn $-w \in g(G)$ dann gibt es $r \in (0, |w|)$ mit $B_r(-w) \subset G_1$. Wenn $z \in G_1$ dann folgt $-z \notin G_1$. Durch eine zusätzliche gebrochen lineare Abbildung

$$g_2 : z \mapsto \frac{1}{r}(z - w)$$

findet man eine biholomorphe Abbildung $g_2 : G_1 \rightarrow G_2 := g_2(G_1)$ mit $B_1(0) \cap G_2 = \emptyset$. Setzt man

$$g_3 : z \mapsto 1/z$$

an, so folgt $G_3 := g_3(G_2) \subset B_1(0)$. Sei $z_0 \in G_3$. Mit Hilfe der gebrochen linearen Abbildung

$$g_4 : z \mapsto \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

folgt, dass $f_0 = g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$ die Menge G biholomorph abbildet auf eine Teilmenge \tilde{G} von $B_1(0)$ mit $0 \in \tilde{G}$.

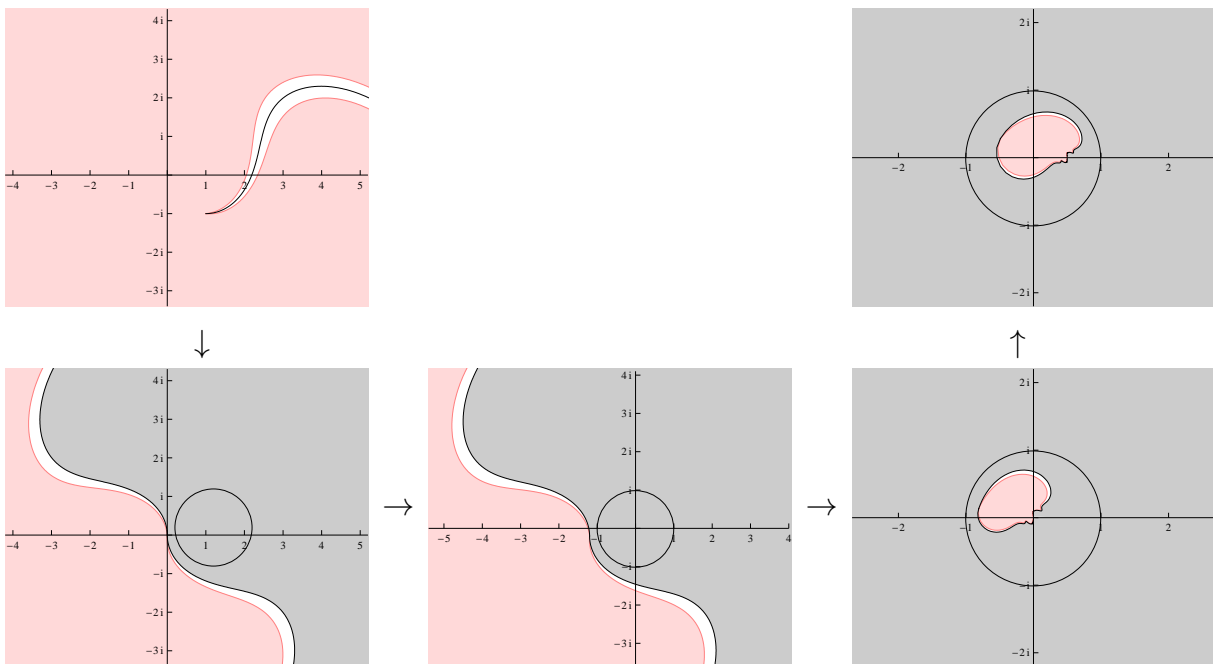


Abbildung 14.1: Entgegen dem Uhrzeigersinn: $G \xrightarrow{g_1} G_1 \xrightarrow{g_2} G_2 \xrightarrow{g_3} G_3 \xrightarrow{g_4} \tilde{G}$.

2. Der zweite Schritt betrifft die Existenz einer biholomorphen Funktion als Grenzfunktion einer Folge von biholomorphen Abbildungen $f_n : \tilde{G} \rightarrow f_n(\tilde{G}) \subset B_1(0)$. Man betrachte dazu die Familie von Funktionen

$$\mathcal{F} = \left\{ f : \tilde{G} \rightarrow B_1(0); f \text{ holomorph, injektiv, } f(0) = 0 \text{ und } \text{Arg}(f'(0)) = 0 \right\}.$$

Weil $f : z \mapsto z$ in \mathcal{F} liegt, ist diese Menge nicht leer. Setze

$$M = \sup \{f'(0); f \in \mathcal{F}\}.$$

Weil \tilde{G} ein Gebiet ist (Satz über Gebietstreue) gibt es $r > 0$ mit $B_r(0) \in \tilde{G}$ und es folgt aus

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} dz = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} dz \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| r d\varphi \leq \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} r d\varphi = \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

dass $M \in [1, r^{-1}]$. Sei nun $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = M$. Weil f_n beschränkt ist (durch 1) liefert der Satz von Montel uns eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{f_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Der Satz von Weierstrass liefert uns, dass die Grenzfunktion f holomorph ist, und dass für f gilt $f(\tilde{G}) \subset B_1(0)$, $f(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(0) = 0$ und $f'(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} f'_{n_m}(0) = M$. Sogar gilt, dass f injektiv ist: Wenn f nicht injektiv wäre, dann gebe es $z_1 \neq z_2 \in \tilde{G}$ mit $f(z_1) = f(z_2) =: w$. Weil f nicht konstant ist hätte $f - w$ Nullstellen ohne Häufungspunkte, gebe es Umgebungen $B_{r_1}(z_1) \subset \tilde{G}$ und $B_{r_2}(z_2) \subset \tilde{G}$ mit $f - w \neq 0$ auf $\partial B_{r_1}(z_1)$ und $\partial B_{r_2}(z_2)$. Durch die gleichmäßige Konvergenz und den Satz von Rouché hätte auch $f_n - w$ für n genügend groß Nullstellen in $B_{r_1}(z_1)$ und $B_{r_2}(z_2)$. Das würde bedeuten, dass f_n nicht injektiv wäre, ein Widerspruch.

3. Im dritten Schritt zeigen wir, dass $f(\tilde{G}) = B_1(0)$. Nehme an $f(\tilde{G}) = \hat{G} \subsetneq B_1(0)$. Dann gibt es $w_1 \in B_1(0) \setminus \hat{G}$ und kann man durch eine gebrochen lineare Funktion w_1 auf 0 Abbilden:

$$h_1 : z \mapsto \frac{z - w_1}{1 - \bar{w}_1 z}.$$

Man hat $h_1(0) = -w_1$. Weil $\tilde{G}_1 := h_1(\tilde{G})$ einfach zusammenhängend ist und $0 \notin \tilde{G}_1$, kann man $\text{Log}^\#(z)$ als holomorphe Funktion auf \tilde{G}_1 definieren ($\text{Log}^\#(z) = \text{Log}(z) + 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{N}$). Setze

$$h_2 : z \mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\text{Log}^\#(z)\right)$$

und $w_2 = h_2(-w_1)$. Anschließend nehmen wir

$$h_3 : z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z - w_2}{1 - \bar{w}_2 z}$$

wobei wir $\varphi \in (-\pi, \pi]$ so wählen, dass $\text{Arg}((h_3 \circ h_2 \circ h_1)'(0)) = 0$. Es gilt

$$(h_3 \circ h_2 \circ h_1)(0) = (h_3 \circ h_2)(-w_1) = h_3(w_2) = 0.$$

Wir betrachten

$$h : z \mapsto h_1^{\text{invers}}\left(\left(h_1^{\text{invers}}(z)\right)^2\right).$$

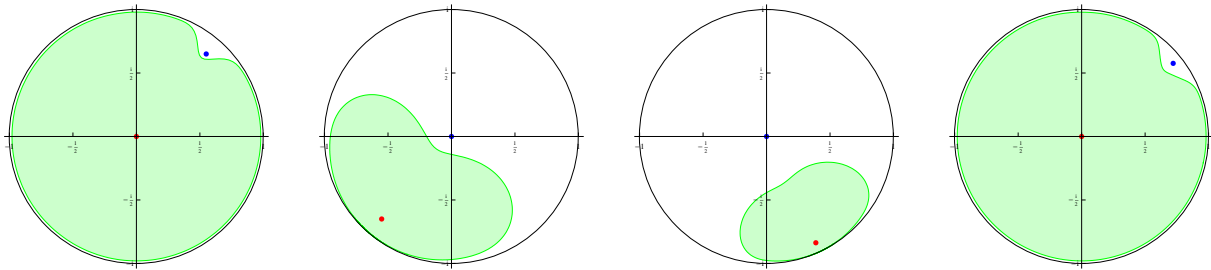


Abbildung 14.2: Eine Skizze zu $\tilde{G} \xrightarrow{h_1} \tilde{G}_1 \xrightarrow{h_2} \tilde{G}_2 \xrightarrow{h_3} \tilde{G}_3$.

Diese Funktion h bildet $B_1(0)$ auf $B_1(0)$ ab, ist keine Drehung und darum folgt aus dem Schwarzschen Lemma $|h'(0)| < 1$. Weil h die Inverse ist zu $h_3 \circ h_2 \circ h_1 : \tilde{G} \rightarrow (h_3 \circ h_2 \circ h_1)(\tilde{G}) \subset B_1(0)$ gilt

$$(h_3 \circ h_2 \circ h_1)'(0) = \frac{1}{h'(0)} > 1.$$

Dann ist $h_3 \circ h_2 \circ h_1 \circ f$ eine biholomorphe Abbildung von \tilde{G} nach einer Teilmenge von $B_1(0)$ mit

$$(h_3 \circ h_2 \circ h_1 \circ f)'(0) = (h_3 \circ h_2 \circ h_1)'(0) f'(0) > M,$$

ein Widerspruch.

4. Die Eindeutigkeit. Wenn sowohl f als auch \tilde{f} biholomorphe Abbildungen sind von G nach $B_1(0)$, dann ist $\tilde{f} \circ f^{\text{invers}} : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ biholomorph und hat deshalb die Form

$$\left(\tilde{f} \circ f^{\text{invers}}\right)(z) = e^{i\varphi} \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}.$$

Weil $\left(\tilde{f} \circ f^{\text{invers}}\right)(0) = 0$ folgt $w = 0$, und weil

$$\left(\tilde{f} \circ f^{\text{invers}}\right)'(0) = \frac{\tilde{f}'(z_0)}{f'(z_0)} \in \mathbb{R}^+$$

folgt $e^{i\varphi} = 1$. Es folgt, dass $\tilde{f}(z) = f(z)$. □

14.3 Schwarz und Christoffel

Proposition 14.9 (Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip). Sei G ein Gebiet in \mathbb{C} , das symmetrisch ist bezüglich der reellen Achse. Wenn gilt, dass

1. f holomorph ist auf $\{z \in G; \text{Im } z > 0\}$,
2. f stetig ist auf $\{z \in G; \text{Im } z \geq 0\}$ und
3. $f(G \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$,

dann ist

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{auf } \{z \in G; \text{Im } z \geq 0\}, \\ f(\bar{z}) & \text{auf } \{z \in G; \text{Im } z < 0\}, \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion auf G .

Beweis. Setze

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \tilde{f}(x + iy) \text{ und } v(x, y) = \operatorname{Im} \tilde{f}(x + iy).$$

Dann gilt

$$u(x, -y) = u(x, y) \text{ und } v(x, -y) = -v(x, y).$$

Die Stetigkeit von u und v und die Annahme, dass $v(x, 0) = 0$ auf $G \cap \mathbb{R}$ liefern die Stetigkeit von \tilde{f} auf G . Die Differenzierbarkeit auf $\{z \in G; \operatorname{Im} z < 0\}$ folgt aus der reellen Differenzierbarkeit von u und v und den Cauchy-Riemann Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_x(u(x, -y)) &= (\partial_x u)(x, -y) = (\partial_y v)(x, -y) = -\partial_y(v(x, -y)) = \partial_y(-v(x, -y)), \\ \partial_y(u(x, -y)) &= -(\partial_y u)(x, -y) = (\partial_x v)(x, -y) = \partial_x(v(x, -y)) = -\partial_x(-v(x, -y)). \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu beweisen, dass \tilde{f} komplex differenzierbar ist in $x \in G \cap \mathbb{R}$. Sei $B_r(x) \subset \mathbb{C}$. Weil \tilde{f} stetig ist auf $G \cap \mathbb{R}$, kann man für jede differenzierbare geschlossene Kurve γ innerhalb $B_r(x)$ beliebig nahe Kurven γ^+ in $\{z \in B_r(x); \operatorname{Im} z > 0\}$ und γ^- in $\{z \in B_r(x); \operatorname{Im} z < 0\}$ finden mit

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{\gamma^+} \tilde{f}(z) dz + \int_{\gamma^-} \tilde{f}(z) dz \right) = 0.$$

Wenn $\int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz = 0$ für beliebige Kurven in $B_r(x)$, ist f holomorph in $B_r(x)$. Die Kurven γ^+ und γ^- bekommt man zum Beispiel indem man definiert

$$\begin{aligned} \gamma^+(t) &= \operatorname{Re} \gamma(t) + i \phi_{\varepsilon}(\operatorname{Im} \gamma(t)), \\ \gamma^-(t) &= \operatorname{Re} \gamma(t) - i \phi_{\varepsilon}(-\operatorname{Im} \gamma(t)), \end{aligned}$$

mit

$$\phi_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} t & \text{für } t > \frac{1}{2}\varepsilon, \\ t^2/\varepsilon + \varepsilon/4 & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}\varepsilon], \\ \frac{1}{4}\varepsilon & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

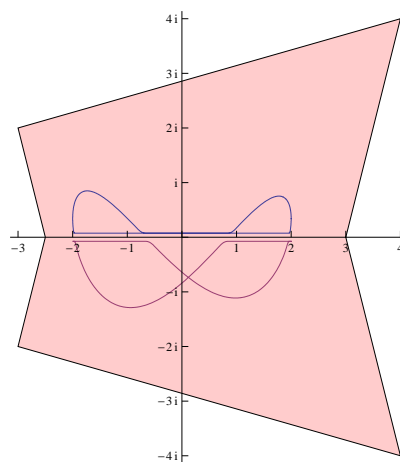
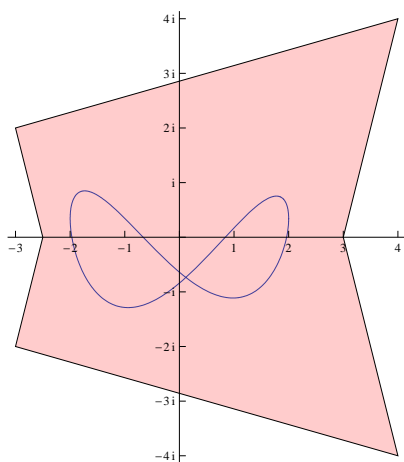
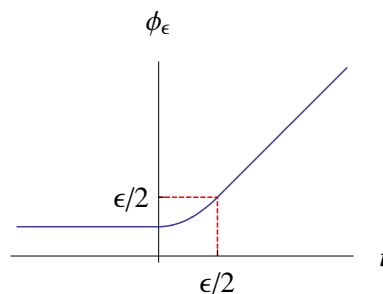


Abbildung 14.3: Die Kurven γ und γ^+, γ^- . Bemerke, dass Teilkurven, die in entgegengesetzter Richtungen durchlaufen werden, sich aufheben und nicht am Integralwert beitragen.

□

Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip erlaubt es, die Riemannsche Abbildung für ein Polygon etwas präziser festzulegen. Ein Polygon ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand von einem Polygonzug beschrieben wird.

Theorem 14.10 (Schwarz-Christoffel). Sei P ein Polygon in \mathbb{C} . Dann existiert eine biholomorphe Abbildung

$$h : (\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+) \rightarrow P.$$

Wenn wir die Eckpunkte von P entgegen dem Uhrzeigersinn w_1, \dots, w_n nennen und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die zugehörigen Winkel, die die Änderungen in der Tangentialrichtung messen, das heißt

$$\alpha_k = \text{Arg} \left(\frac{w_{k+1} - w_k}{w_k - w_{k-1}} \right) \text{ für } k = 1, \dots, n$$

(setze $w_n = w_0$ und $w_{n+1} = w_1$), dann gibt es $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit $h(x_k) = w_k$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $h(\infty) = w_n$ und es gilt

$$h'(z) = \alpha (z - x_1)^{-\alpha_1/\pi} (z - x_2)^{-\alpha_2/\pi} \dots (z - x_{n-1})^{-\alpha_{n-1}/\pi}.$$

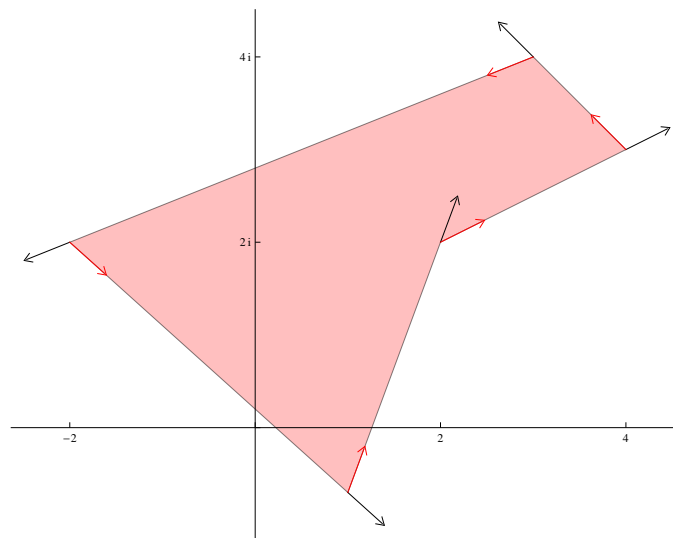


Abbildung 14.4: Die Winkeländerungen erscheinen in der Schwarz-Christoffel Transformation.

Bemerkung 14.10.1. Man verwendet

$$z^{-\alpha_k/\pi} = \exp \left(-\frac{\alpha_k}{\pi} \text{Log}^*(z) \right)$$

mit

$$\text{Log}^*(z) = \text{Log}(z/i) + \frac{1}{2}\pi.$$

Das ist eine Erweiterung des Logarithmus mit $-i(0, \infty)$ als Schnitt. Bemerke, dass $-\alpha_1/\pi > -1$ integrierbare Singularitäten gibt.

Bemerkung 14.10.2. Das Theorem gilt mit kleinen Änderungen sogar für unbeschränkte Polygone.

Literaturverzeichnis

- [1] Ablowitz, Mark J.; Fokas, Athanassios S.: COMPLEX VARIABLES: INTRODUCTION AND APPLICATIONS. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. ISBN: 0-521-53429-1.
- [2] Ahlfors, Lars V.: COMPLEX ANALYSIS: AN INTRODUCTION OF THE THEORY OF ANALYTIC FUNCTIONS OF ONE COMPLEX VARIABLE. Second edition McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London 1966.
- [3] Fischer, Wolfgang; Lieb, Ingo: FUNKTIONENTHEORIE. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1980. ISBN: 3-528-07247-4.
- [4] Hille, Einar: ANALYTIC FUNCTION THEORY. VOL. 1. Introduction to Higher Mathematics, Ginn and Company, Boston 1959.
- [5] Jänich, Klaus: EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONENTHEORIE. Second edition. Hochschultext. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980. ISBN: 3-540-10032-6.
- [6] John H. Mathews and Russell W. Howell: COMPLEX ANALYSIS FOR MATHEMATICS AND ENGINEERING. Fifth Edition, 2006. Jones and Bartlett Pub. Inc. ISBN: 9780763737481.
- [7] Nehari, Zeev: CONFORMAL MAPPING. Reprinting of the 1952 edition. Dover Publications, Inc., New York, 1975.
- [8] Nehari, Zeev: INTRODUCTION TO COMPLEX ANALYSIS. Revised edition Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass. 1968.
- [9] Remmert, Reinhold: FUNKTIONENTHEORIE I. Springer-Verlag, Berlin, 1984. ISBN: 3-540-12782-8.