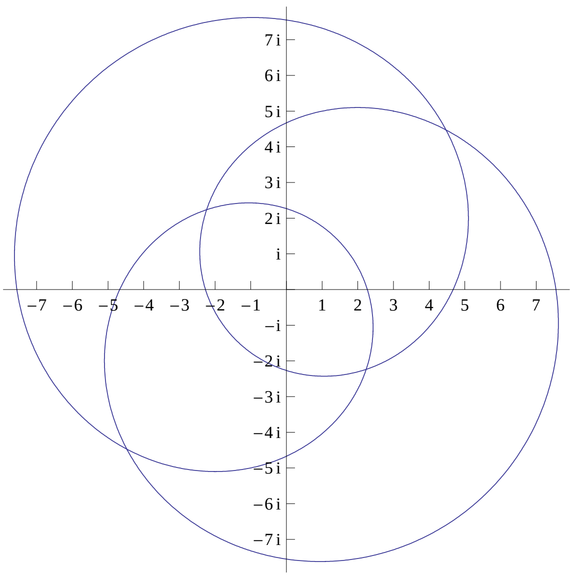
1. Gegeben sei die gebrochen-lineare Transformation $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit
$$f(z) = \frac{1 + iz}{1 - z}.$$
Wie sehen die Bilder der folgenden Mengen unter f aus? Geben Sie die Bildmengen jeweils explizit an, zeichnen Sie sie in ein Koordinatensystem und begründen Sie Ihre Antwort.
   (a) $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$
   (c) $\{1 + e^{it}; t \in \mathbb{R}\}$

2. Die Funktion $f : B_2(0) \to \mathbb{C}$ sei holomorph auf $B_2(0)$. Weiter gelte
$$|f(0)| < \min\{|f(z)|\,;|z| = 1\}.$$
Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle in $B_1(0)$ hat.
Hinweis: Wenn f keine Nullstelle hat, dann ist $z \mapsto 1/f(z)$ ...

3. Gegeben sei $g(z) = \dfrac{z}{(z + 2i)(z - 3)}$.
   (a) In einer Umgebung von 0 kann man g als Potenzreihe schreiben:
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$
   Wieso stimmt diese Behauptung?
   (b) Welchen Konvergenzradius hat $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n z^n$?
   (c) Berechnen Sie α_0 und α_1.

4. Gegeben seien $g(z) = \dfrac{z}{(z + 2i)(z - 3)}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit
$$\gamma(t) = 3e^{it} + 5ie^{3it}.$$
Die Kurve ist in nebenstehender Abbildung skizziert. Berechnen Sie $\int_\gamma g(z)dz$.



5. (a) Wie viele Nullstellen hat $p(z) = z^4 + 100z^2$ in $B_5(0)$?
   (b) Wie viele Nullstellen hat $q(z) = z^4 + 100z^2 + z + 1$ in $B_5(0)$?

6. Sei f meromorph auf $\mathbb{C}$, und sei g eine nichtkonstante ganze Funktion. Sind die folgenden Behauptungen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Aussagen.

   (a) $z \mapsto (f(z))^2$ ist meromorph.

   (b) $z \mapsto f(z)/g(z)$ ist meromorph.

   (c) $z \mapsto (g \circ f)(z)$ ist meromorph.

   (d) $z \mapsto (f \circ g)(z)$ ist meromorph.

7. Wir betrachten $h : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion h harmonisch ist auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

   (b) Gibt es eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $h(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$?

8. Tragen Sie in die Kästchen richtige Kombinationen der vier Gebiete

$$\begin{aligned} A_1 &= \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}, \\ A_2 &= \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}, \\ A_3 &= \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0 \text{ und } \operatorname{Re} z > 0\} \text{ und} \\ A_4 &= \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\} \end{aligned}$$

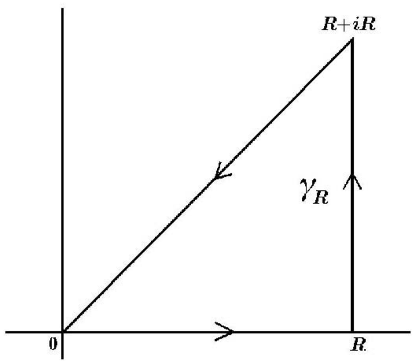
ein, so dass die fünf gegebenen Abbildungsvorschriften biholomorphe Funktionen $f_\sigma : A_i \to A_j$ definieren.

	Vorschrift f_σ	:	A_i	$\to$	A_j
$a.$	$f_a(z) = iz$	:		$\to$	
$b.$	$f_b(z) = z^2$	:		$\to$	
$c.$	$f_c(z) = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)}$	:		$\to$	
$d.$	$f_d(z) = \dfrac{1}{z}$	:		$\to$	
$e.$	$f_e(z) = \dfrac{z-i}{1-iz}$	:		$\to$	

9. (a) Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz,$$

   wobei γ_R eine linksherum drehende Jordan-Kurve ist, die als Bild das Dreieck mit den Eckpunkten 0, R und $R+iR$ hat.



   (b) Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx$$

   mit Hilfe von (a) und $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

10. Formulieren Sie den Satz über die Integralformel von Cauchy.