

NAME:

AUFGABE 1

Möbiustransformationen sind bijektive Abbildungen f von $\widehat{\mathbb{C}}$ nach $\widehat{\mathbb{C}}$ der Form

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

mit einer Bedingung an $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

(a) Welche Bedingung erfüllen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$?

(b) Gibt es eine solche Abbildung f mit

$$f(1) = 1, f(0) = i \text{ und } f(-1) = -1 ?$$

(c) Gibt es eine solche Abbildung f mit

$$f(1) = 1, f(0) = i, f(-1) = -1 \text{ und } f(\infty) = -i ?$$

NAME:

AUFGABE 2

(a) Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gilt:

$$z \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty) \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in (-\infty, 0].$$

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{2}{1-z^2}?$$

Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig.

NAME:

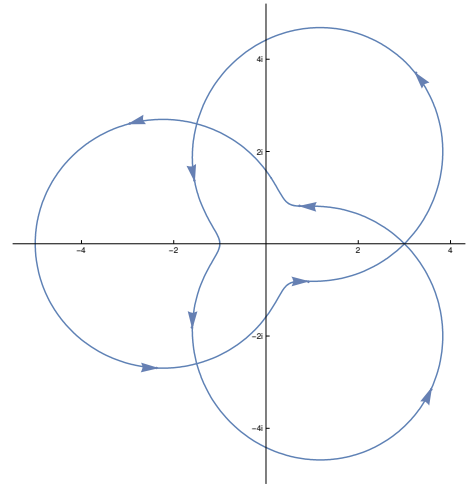
AUFGABE 3

Die Bildmenge der Kurve $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$\gamma(t) = \left(3 + 2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right) e^{it},$$

ist hier skizziert. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \frac{4}{4 - z^2} dz.$$



NAME:

AUFGABE 4

- (a) Zeigen Sie, dass $u(x, y) = e^y \sin(x)$ harmonisch auf \mathbb{R}^2 ist.
- (b) Berechnen Sie eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derart, dass $\operatorname{Re}(h(x + iy)) = u(x, y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

NAME:

AUFGABE 5

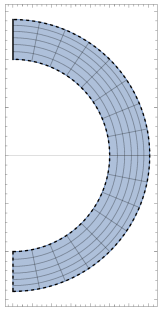
Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{\cos(z)}$. Es gibt $a_n \in \mathbb{C}$ derart, dass in der Nähe von 0 folgendes gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

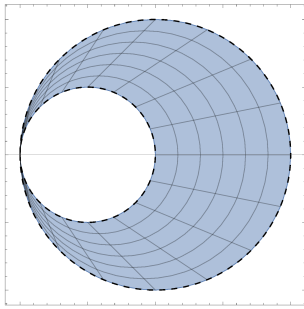
- (a) Berechnen Sie a_0, a_1, a_2 und a_3 .
- (b) Welchen Konvergenzradius hat diese Potenzreihe?

NAME:

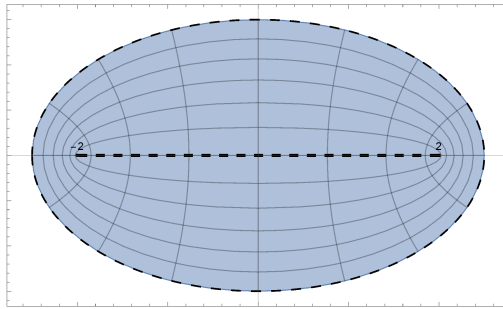
AUFGABE 6



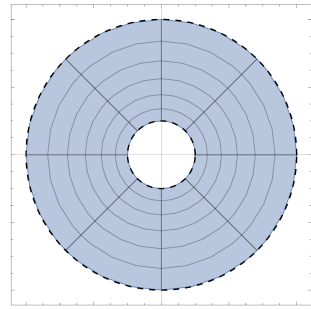
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Sei $A = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\}$. Es gibt 4 Abbildungen $f_k : A \rightarrow \mathbb{C}$ und 4 Bilder $f_k(A)$.

$$f_1(z) = z^2,$$

$$f_2(z) = \sqrt{z} := \sqrt{|z|} \exp\left(\frac{1}{2}i \operatorname{Arg}(z)\right),$$

$$f_3(z) = z + \frac{1}{z},$$

$$f_4(z) = z + |z|.$$

(a) Welche Abbildung gehört zu welchem Bild?

(b) Welche Abbildungen sind konform?

Begründen Sie Ihre Antworten.

NAME:

AUFGABE 7

Geben Sie die Vorschrift einer meromorphen Funktion mit der Hauptteilverteilung $\left\{ \frac{k}{(z-k)^2} \right\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ an.

NAME:

AUFGABE 8

Welche ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllen

$$\frac{1}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq 1+|z| \text{ für alle } z \in \mathbb{C} ?$$

NAME:

AUFGABE 9

Wahr oder nicht?

(a) $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k}\right)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k^2}\right)$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Begründen Sie Ihre Antworten.