NAME:	AUFGABE 1	

1. Gegeben sei die gebrochen-lineare Transformation $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit

$$f(z) = 4\frac{z-i}{z+i}.$$

Wie sehen die Bilder der folgenden Mengen unter f aus? Geben Sie die Bildmengen jeweils explizit an, zeichnen Sie sie in ein Koordinatensystem und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = 0\}$.

(b) $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z = 1\}$.

(c) $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

NAME: AUFGABE 2

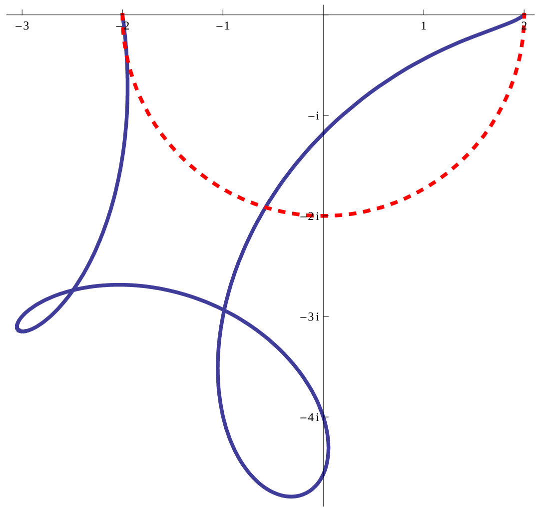
2. Die Kurve $\gamma : [-2, 2] \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\gamma(t) = it^2 + t - 4i + e^{-i\pi t} - 1.$$

Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz.$$

Hinweis: Das Bild dieser Kurve ist in nebenstehender Abbildung als durchgezogene Linie eingezeichnet.



NAME: | AUFGABE 3

3. Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ biholomorph mit $f(\frac{1}{4}) = 0$. Berechnen Sie $|f(0)|$.

NAME:	AUFGABE 4	

4. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$f(z) = \ln|z| + i \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass für z mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ gilt

$$f(z) = \operatorname{Log}(z).$$

In einer Umgebung von $z_0 = 1 + i$ lässt sich f in eine Potenzreihe der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - 1 - i)^k$$

entwickeln.

(b) Wieso stimmt diese Behauptung?

(c) Berechnen Sie a_0 und a_1.

(d) Konvergiert p an der Stelle $z = 1$? Wenn ja, welchen Wert hat $p(1)$?

(e) Konvergiert p an der Stelle $z = i - \frac{1}{4}$? Gilt $f(i - \frac{1}{4}) = p\left(i - \frac{1}{4}\right)$?

NAME:	AUFGABE 5	

5. Sind die folgenden Behauptungen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Aussagen.

(a) Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann ist auch $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch $\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$, holomorph.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $e^{\mathrm{Log}(z)} = z$.

(c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Log}(e^z) = z$.

(d) Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann gilt $\max\left\{|f(z)|; z \in \overline{B_1(0)}\right\} = \max\{|f(z)|; z \in \partial B_1(0)\}$.

(e) Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann gilt $\min\left\{|f(z)|; z \in \overline{B_1(0)}\right\} = \min\{|f(z)|; z \in \partial B_1(0)\}$.

NAME: AUFGABE 6

6. Sei $u : \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < 3\} \to \mathbb{R}$ eine positive harmonische Funktion. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{10} \leq \frac{u\,(1,0)}{u(0,1)} \leq 10$$

Hinweis: Harnack.

Name: Aufgabe 7

7. Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

konvergiert.

NAME:	AUFGABE 8	

8. Wir betrachten

$$g(z) = \frac{z}{z^4 + 1}.$$

(a) Wie viele Nullstellen und wie viele Polstellen hat g in $B_5(0)$?

(b) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = 5e^{it}$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Name:	Aufgabe 9	

9. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Wann heißt eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$

   (a) beschränkt?

   (b) ganz?

   (c) meromorph?

Name: | **Aufgabe 10**

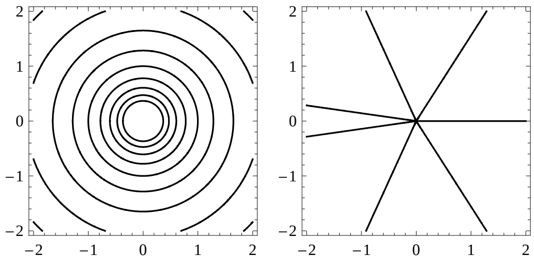
10. Gegeben seien die folgenden Funktionsvorschriften:

$$f_1(z) = z \qquad f_2(z) = \frac{1}{z} \qquad f_3(z) = z^2 \qquad f_4(z) = \mathrm{Log}(z)$$

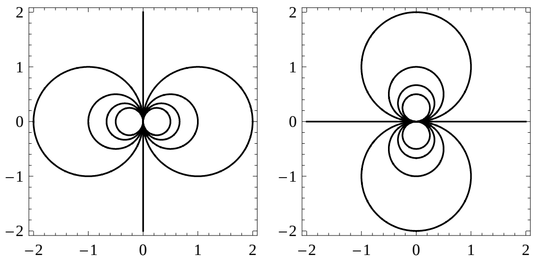
In den untenstehenden Skizzen sind links jeweils einige Niveaumengen von $\mathrm{Re}\, f_i$ und rechts Niveaumengen von $\mathrm{Im}\, f_i$ eingezeichnet. Ordnen Sie die Skizzen den Funktionsvorschriften zu.
Hinweis: Für eine Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige Niveaumenge definiert durch

$$\{z \in \mathbb{C}; g(z) = c\}\,.$$

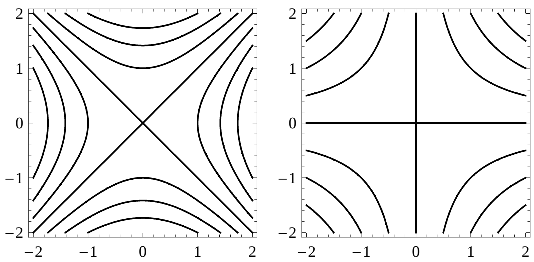
Skizze 1:



Skizze 2:



Skizze 3:



Skizze 4: