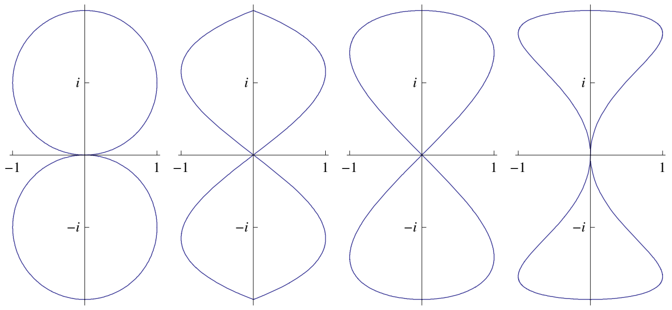
NAME:

AUFGABE 1

Berechen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $\exp(z) = \exp(-z)$.

NAME: AUFGABE 2

(a) Welches Bild gehört zu der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \sin(2t) + 2i \sin(t)$?



Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz$.

Name:	Aufgabe 3	

Die Funktion u ist harmonisch auf $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ und stetig auf $\bar{B}$. Außerdem gilt

$$u(\cos t, \sin t) = \begin{cases} (\sin t)^2 & \text{für } t \in [0, \pi] \,, \\ 0 & \text{für } t \in (\pi, 2\pi) \,. \end{cases}$$

Berechnen Sie $u(0, 0)$.

NAME: AUFGABE 4

(a) Wie nennt man die Singularität von $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z} e^{1/z}$ in 0?

(b) Wenn man $w = \frac{1}{z}$ substituiert, dann findet man entweder

(i) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} e^{1/z} dz = \oint_{|w|=1} \frac{1}{w} e^{w} dw$, oder

(ii) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} e^{1/z} dz = -\oint_{|w|=1} \frac{1}{w} e^{w} dw$, oder

(iii) keine dieser beiden Möglichkeiten.

Welche Antwort ist richtig und wieso?

(c) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} e^{1/z} dz.$$

NAME: | AUFGABE 5

Wir betrachten die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z) - \frac{3}{4}i}$.

(a) Zeigen Sie, dass $z = i\ln(2)$ und $z = \pi - i\ln(2)$ Polstellen dieser Funktion sind.

(b) Von welcher Ordnung sind diese Polstellen?

(c) Hat f noch andere Polstellen?

Name: | Aufgabe 6

Wir betrachten die gleiche Funktion wie in der letzten Aufgabe.

(a) Begründen Sie, dass es $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und $r > 0$ gibt mit

$$\frac{1}{\sin(z) - \frac{3}{4}i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für alle } z \in \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}. \tag{1}$$

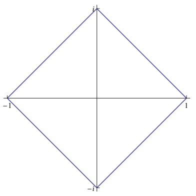
(b) Berechnen Sie a_0 und a_1.

(c) Bestimmen Sie das größtmögliche r in (1).

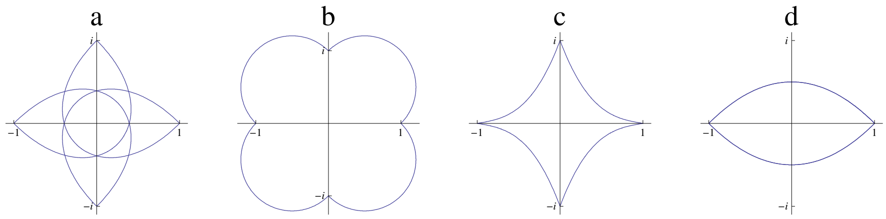
Name: Aufgabe 7

Sei R die Raute mit Eckpunkten $\{1, i, -1, -i\}$. Ordnen Sie zu:

- Bild .... ist eine Skizze von $f(R)$ für $f(z) = z^2$.
- Bild .... ist eine Skizze von $g(R)$ für $g(z) = z^3$.
- Bild .... ist eine Skizze von $h(R)$ für $h(z) = z^{-1}$.



$\rightarrow$



Begründen Sie Ihre Antworten.

Name: | Aufgabe 8

Seien f und g meromorphe Abbildungen.

(a) Ist $z \mapsto f(z) + g(z)$ eine meromorphe Abbildung?

(b) Ist $z \mapsto f(z)g(z)$ eine meromorphe Abbildung?

(c) Ist $z \mapsto f(g(z))$ eine meromorphe Abbildung?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Name: | Aufgabe 9

Welche der Funktionenfolgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist kompakt konvergent und welche nicht?

(a) $f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-2k}}{z - e^{-k}}$;

(b) $f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-k}}{z - e^{ik}}$;

(c) $f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{z - e^{k}}$;

Begründen Sie Ihre Antwort.