Probeklausur

Die Klausur wird aus zehn Aufgaben bestehen. So könnten sie zum Beispiel aussehen:

1. (a) Für $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ sei $f(z) = x^2y^3 + ix^3y$. Bestimmen Sie alle z_0, an denen f differenzierbar ist.

   (b) Sei
   $$\ell = \left\{ z \in \mathbb{C}; \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} \right\}.$$
   Zeigen Sie: Gilt $f(\mathbb{C}) \subset \ell$ für eine ganze Funktion, so ist f konstant.

2. Geben Sie eine Stammfunktion an zu $z \mapsto \frac{1}{z}$, die auf $\mathbb{C} \setminus i(-\infty, 0]$ definiert ist. Ist diese Stammfunktion lokal umkehrbar?

3. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten kurz!

   (a) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Log}(e^z) = z$.

   (b) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $e^{\operatorname{Log}(z)} = z$.

   (c) Eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ besitzt lokal eine Stammfunktion.

   (d) Eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion.

   (e) Eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \supset U \to \mathbb{C}$ hat lokal eine Stammfunktion.

   (f) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Besitzt eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion, so lässt sie sich in eine Potenzreihe entwickeln.

4. Gegeben sei die gebrochen-lineare Transformation $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit
   $$f(z) = \frac{2 - z}{i + z}$$
   Wie sehen die Bilder der folgenden Mengen unter f aus? Zeichnen Sie die Bildmengen jeweils in ein Koordinatensystem und begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = 2\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C}; |z - 1| = 2\}$

5. Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = -2e^{it}$.

   (a) Sei f auf einer Umgebung von $\gamma([0, 2\pi])$ holomorph. Wie ist $\int_\gamma f(z)\,dz$ definiert?

   (b) Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{1}{\cos(2+\frac{1}{z})}\,dz$.

6. (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist
   $$z \mapsto f(z) = \sum_{k=-5}^{\infty} \frac{2}{1 + 3^k} z^k$$
   wohldefiniert?

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist f holomorph? Geben Sie dort die Ableitung f' an.

(c) Berechnen Sie für den Weg $\gamma : [0, 2\sqrt{\pi}] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it^2}$ das Integral

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$

(d) Geben Sie eine Stammfunktion von f auf größtmöglichem Definitionsgebiet an.

7. Formulieren Sie den Riemannschen Abbildungssatz.

8. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten kurz!

(a) Wenn $f \not\equiv 0$ eine ganze Funktion ist, ist $\frac{1}{f}$ eine meromorphe Funktion.

(b) Wenn f und g ganze Funktionen sind, dann ist $f \circ g$ eine ganze Funktion.

(c) Wenn f und g meromorphe Funktionen sind, dann ist $f \circ g$ eine meromorphe Funktion.

9. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Die Funktion $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ erfülle $\Delta u = 1$ in G und sei sogar unendlich oft differenzierbar und stetig bis auf den Rand. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $(a, b).\nabla u$ ist harmonisch.

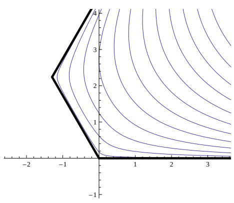
(b) Die Funktion $(a, b).\nabla u$ hat ihr Maximum auf dem Rand.

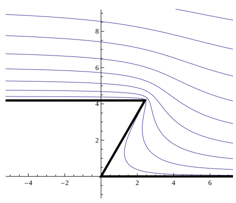
(c) Die Funktion $|\nabla u|$ hat ihr Maximum auf dem Rand.

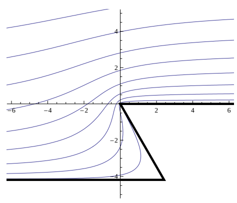
10. Es seien vier Funktionen $f_k : \mathbb{R} + i\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ gegeben. Die zugehörigen Ableitungen seien

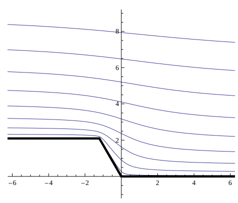
$$f_1'(z) = (z-1)^{\frac{2}{3}}(z+1)^{-\frac{2}{3}} \qquad f_2'(z) = (z-1)^{-\frac{2}{3}}(z+1)^{\frac{2}{3}}$$
$$f_3'(z) = (z-1)^{-\frac{1}{3}}(z+1)^{\frac{1}{3}} \qquad f_4'(z) = (z-1)^{-\frac{1}{3}}(z+1)^{-\frac{1}{3}}$$

Ordnen Sie die nachfolgenden Skizzen von Strömungslinien den Funktionen zu.


Skizze 1


Skizze 2


Skizze 3


Skizze 4

11. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} + \frac{z}{k^2}$$

kompakt konvergiert.

12. Sei f eine ganze Funktion, die die folgende Bedingung erfüllt: Es gibt $M \in \mathbb{R}^+$ derart, dass $|f(z)| \le M\sqrt{|z|}$ gilt für $z \in \mathbb{C}$. Gilt $f \equiv 0$?