

Funktionentheorie
Übungsblatt 0
Version 2

Dieses Übungsblatt wird am 13. und 14. April besprochen und gibt keine Punkte.

Aufgabe 1: Schreiben Sie die folgenden Zahlen als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

(a) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{100}$

(b) $\frac{1}{3+2i}$

(c) $\frac{4-5i}{-1+3i}$

(d) $(3+2i)^5$

(e) $\sum_{n=0}^7 \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$

(f) $\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$

(g) $(1+i)^{17} - (1-i)^{17}$

(h) $\frac{(1+i\sqrt{3})^{51}}{2^{50}}$

Aufgabe 2: Sei $z \in \mathbb{C}$. Definieren Sie $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ und $|z|$ nur mit Hilfe von z und \bar{z} .

Aufgabe 3: Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen an:

(a) $z^2 + z(2-2i) + (3-6i) = 0$

(b) $z^2 = 9i$

(c) $z^4 + z^2(\sqrt{3}-i) - i\sqrt{3} = 0$

(d) $z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 14z + 26 = 0$. *Hinweis: $1+i$ ist eine Lösung.*

(e) $(z-2+i)^4 = -4$

Aufgabe 4: Sei $z = 300 + \sqrt{10}i$.

(a) Berechnen Sie $|z|$.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{Arg}(z)$.

(c) Berechnen Sie $\frac{z^{18}}{400^9}$.

Aufgabe 5: Sei $z = 0.57382941984 + 1.398472934898i$ und $w = 1.398472934898 + 0.57382941984i$.

(a) Skizzieren Sie z , w , $z+w$ und zw .

(b) Berechnen Sie $\operatorname{Arg}(zw)$.

(c) Berechnen Sie $\left| \frac{4(\bar{z})^5 z^2 w^3 \operatorname{Im}(w)}{(3+i)^2 \operatorname{Re}(z) z^4 (\bar{w})^6} \right|$.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = -1$.

Aufgabe 7: Skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, so dass $|z + 2| = 2|z - 3|$.

Aufgabe 8: Wir wissen, dass $e^{1+2n\pi i} = e \cdot 1 = e$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt auch

$$e^{-4n^2\pi^2} e = e^{-4n^2\pi^2+1+4n\pi i} = e^{(1+2n\pi i)(1+2n\pi i)} = (e^{1+2n\pi i})^{1+2n\pi i} = e^{1+2n\pi i} = e$$

und damit $e^{-4n^2\pi^2} = 1$. Daraus folgt sofort $e = 1^{4n^2\pi^2} = 1$.

Finden Sie den Fehler.

Aufgabe 9: Viele Leute würden gerne $\sqrt{-1} = i$ schreiben. Finden Sie die Fehler in den folgenden Rechnungen:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = -i$$

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Aufgabe 10: Skizzieren Sie:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} ; \text{Im}((1 - i)z) = 0\}$
- (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| < 4\}$
- (c) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im}(z) \leq 2\pi, |\text{Re}(z)| < 1\}$.

Aufgabe 11: Zeichnen Sie für $f(z) = z^2$ das Bild des linken Dreiecks. Die Bilder der Eckpunkte sind schon eingezeichnet.

