Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

SS 2015

Funktionentheorie
Übungsblatt 1

Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 16. April 2015, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (3 Punkte): Sei $z = -\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{75}}{2}$.

(a) Berechnen Sie $|z|$.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{Arg}(z)$.

(c) Berechnen Sie $\frac{z^{302}}{25^{150}}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Skizzieren Sie mit Begründung die Menge

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \ ; \ \operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{\pi}{4} \right\}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte): Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(x+iy) = \sqrt{|xy|} - i(x^2 - y^2).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen in $(0,0)$ erfüllt sind.

(b) Ist f in $(0,0)$ komplex differenzierbar?

(c) Bestimmen Sie, wo $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $u(x,y) := \sqrt{|xy|}$, differenzierbar ist.

(d) Wo ist f komplex differenzierbar?

Aufgabe 4: Für $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert man

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_0^1 \operatorname{Im} f(t)dt.$$

Zeigen Sie

$$\left| \int_0^1 f(t)dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

Hinweis: Setzen Sie $w = \int_0^1 f(t)dt$ und betrachten Sie $\int_0^1 \bar{w} f(t)dt$.

Aufgabe 5: Es gelte $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen

Aufgabe 6 (5 Punkte): (a) Betrachten Sie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Ist f differenzierbar in 0?

(b) Betrachten Sie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) = \begin{cases} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

Ist g komplex differenzierbar in 0?

Aufgabe 7: Für welche $z \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

(a) $f(z) = z^{25}$

(b) $f(z) = |z|^{25} - |z|^{13}$

(c) $f(z) = \operatorname{Re}(z)^2 + i \operatorname{Im}(z)^3$

(d) $f(x + iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$

Aufgabe 8:

Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen ein, z und w sind dabei schon eingezeichnet:

(a) $\bar{z}$

(b) $z\bar{z}$

(c) zw

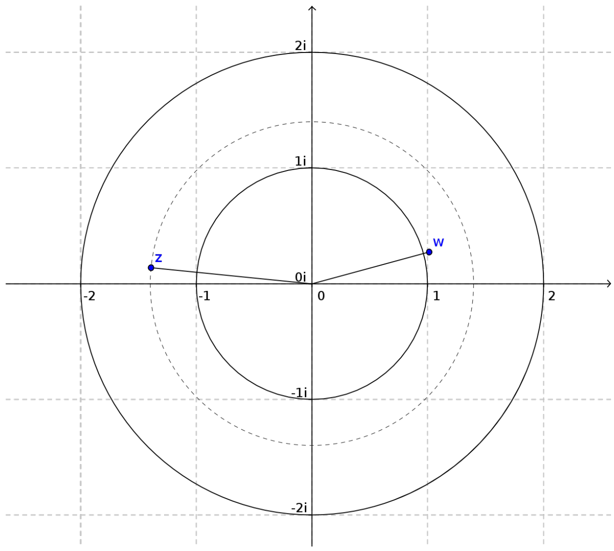
(d) $\dfrac{z}{w}$

(e) $\dfrac{1}{z}$

(f) iz

(g) $-z$

(h) $|z|$



Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**