Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2015**

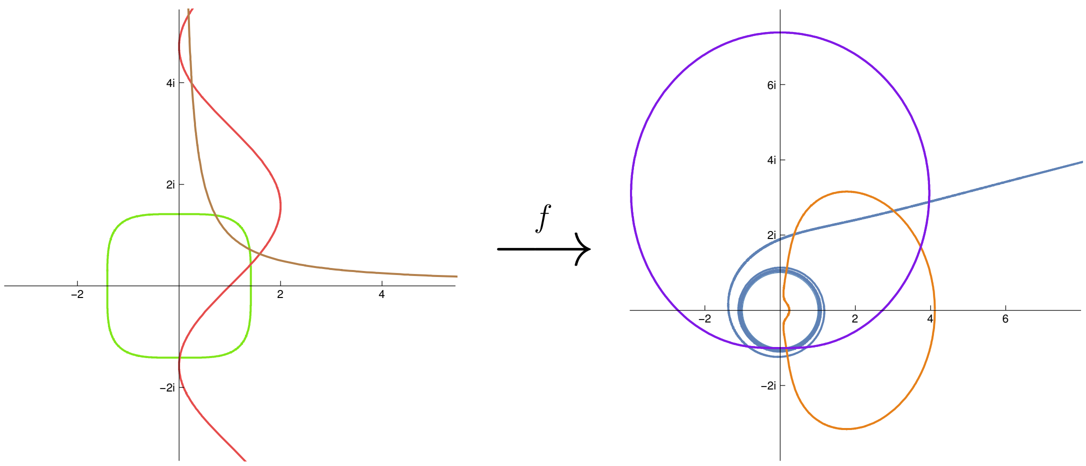
Funktionentheorie
Übungsblatt 10

Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 25. Juni 2015, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (6 Punkte): Gegeben sind die drei Kurven in $\mathbb{C}$:

- $\alpha : \left(0, \frac{1}{2}\pi\right) \to \mathbb{C}$ mit $\alpha(t) = \sqrt{\frac{\cos(t)}{\sin(t)}} + i\sqrt{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}$;
- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\beta(t) = 1 + \sin(t) + it$;
- $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma([0, 2\pi]) = \left\{z \in \mathbb{C}; (\operatorname{Re} z)^4 + (\operatorname{Im} z)^4 = 4\right\}$,

und die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(z)$. Links sind die Kurven skizziert; rechts die Bildkurven unter der Abbildung f. Identifizieren Sie die Kurven α, β, γ links und $f \circ \alpha$, $f \circ \beta$, $f \circ \gamma$ rechts.



Aufgabe 2 (8 Punkte):

(a) Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ biholomorph. Zeigen Sie, dass sich f stetig auf den Rand $\partial B_1(0)$ fortsetzen lässt und dass $f(\partial B_1(0)) \subset \partial B_1(0)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass eine biholomorphe Abbildung $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eindeutig festgelegt wird

- durch Angabe der Bilder dreier Randpunkte oder
- durch Angabe von $f(\tilde{z})$ und $\operatorname{Arg}(f'(\tilde{z}))$ für ein $\tilde{z} \in B_1(0)$ oder
- durch Angabe von $f(\tilde{z})$ und $f(\hat{z})$ für $\tilde{z} \in B_1(0)$ und $\hat{z} \in \partial B_1(0)$.

Aufgabe 3: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene und zusammenhängende Menge. Die folgenden Aussagen erscheinen richtig, sind aber falsch. Geben Sie Gegenbeispiele an.

(a) Wenn jedes (möglicherweise gedrehte) Rechteck automatisch in Ω liegt, falls dessen Rand in Ω liegt, dann ist Ω einfach zusammenhängend.

(b) Wenn Ω einfach zusammenhängend ist, dann ist $\mathbb{C} \setminus \Omega$ zusammenhängend.

Aufgabe 4: Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $f : B_1(0) \to B_1(0)$ mit $f(0) = \frac{1}{2}$ an. Ist dies die einzig mögliche?

Aufgabe 6: Gibt es eine biholomorphe Abbildung $f : B_1(0) \to B_1(0)$ mit

$$f(0) = \tfrac{1}{2} \text{ und } f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}?$$

Aufgabe 7 (6 Punkte): Welche der folgenden Mengen sind zusammenhängend und welche sind einfach zusammenhängend? Ohne Beweis.

(a) $B_1(0) \setminus \overline{B_{\frac{1}{4}}(0)}$

(b) $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \frac{1}{4+|\mathrm{Re}(z)|} < |\mathrm{Im}(z)| < 1\}$

(c) $\mathbb{C} \setminus ([0,\infty) + i[-1,1])$

Aufgabe 8: Wir definieren $g : B_1(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^4}},$$

mit $\sqrt{w} := |w|^{1/2} e^{i\frac{1}{2}\mathrm{Arg}(w)}$.

(a) Zeigen Sie, dass man g zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z^4 \in [1,\infty)\}$ erweitern kann.

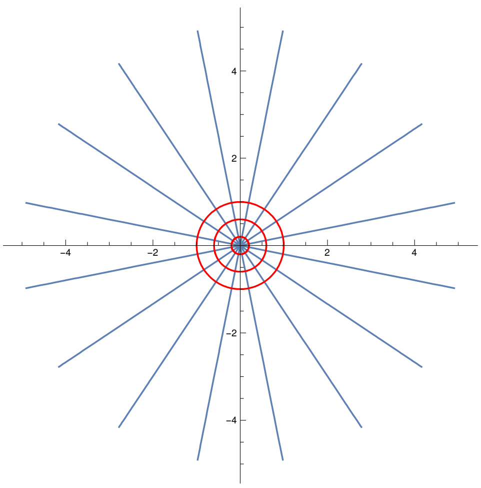
(b) Sei f die Stammfunktion von g mit $f(0) = 0$ auf $\mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C}\ ;\ z^4 \in [1,\infty)\}$. Zeigen Sie, dass

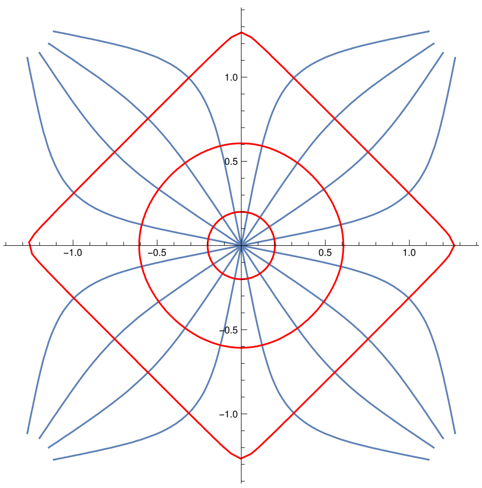
$$-\lim_{t\uparrow 1} f(-t) = -i \lim_{t\uparrow 1} f(it) = i \lim_{t\uparrow 1} f(-it) = \lim_{t\uparrow 1} f(t) \in \mathbb{R}^+.$$

(c) Zeigen Sie, dass f eine stetige Fortsetzung auf $\overline{B_1(0)}$ besitzt.

(d) Zeigen Sie, dass $t \mapsto \mathrm{Arg}\left(\frac{\partial}{\partial t} f\left(e^{it}\right)\right)$ stückweise konstant ist mit Sprüngen für $t = \frac{1}{2}k\pi$ und $k \in \mathbb{Z}$.

(e) Welche Figur ist $f(B_1(0))$?





Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**