Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2015**

Funktionentheorie
Übungsblatt 11

Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 02. Juli 2015, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte): Welche Funktionen $f_i : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ sind meromorph?

(a) $f_1(z) = \tan(z^2)$;

(b) $f_2(z) = \cos(1/z)$;

(c) $f_3(z) = \cos(\tan(z))$;

(d) $f_4(z) = \frac{1}{\cos(e^z)}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Wir suchen meromorphe Funktionen mit zweifache Nullstellen in $\{3k; k \in \mathbb{Z}\}$ und Polen von Ordnung 2 in $\{3k+1; k \in \mathbb{Z}\}$. Welche der folgenden Funktionen erfüllen diese Bedingungen?

(a) $f_1(z) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}(z-1)\right)}\right)^2$;

(b) $f_2(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{z-3k-1}\right)^2}{\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{z-3k}\right)^2}$.

Aufgabe 3: Beantworten Sie die Frage aus Aufgabe 2 auch für diese Funktion:

$$f_3(z) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=-n}^{n} \left(\frac{z-3k}{z-3k-1}\right)^2$$

Können Sie die Frage auch für diese Funktion beantworten:

$$f_4(z) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=-n}^{n} \left(\frac{(z-3k)(3k+1)}{(z-3k-1)3k}\right)^2?$$

Sie müssen diese Aufgabe nicht diese Woche machen, sie wird nächste Woche zurückkommen.

Aufgabe 4: Die Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ sei holomorph in $B_1(0) \setminus \{0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass, wenn f eine Polstelle in 0 hat, die Funktion $\exp(f(z))$ eine wesentliche Singularität in 0 hat.

(b) Zeigen Sie, dass, wenn f eine wesentliche Singularität in 0 hat, die Funktion $\exp(f(z))$ eine wesentliche Singularität in 0 hat.

Aufgabe 5: Sei $f : B_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und f habe eine wesentliche Singularität in 0. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\lim_{r \downarrow 0} \max_{z \in \partial B_r(0)} |z^n f(z)| = \infty.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte): Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und es gelte $\oint_{|z|=r} f(z)dz = 0$ für alle $r > 0$.

(a) Kann 0 eine Polstelle erster Ordnung sein?

(b) Kann 0 eine Polstelle mit Ordnung $k \geq 2$ sein?

(c) Kann 0 eine wesentliche Singularität sein?

Aufgabe 7 (4 Punkte): Wir betrachten das Polynom $g(z) = z^4 + 6z + 3$. Wir wollen zeigen, dass g eine Nullstelle in $B_1(0)$ und drei Nullstellen in $B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ hat.

(a) Setzen Sie $f_1(z) = z^4$ und zeigen Sie mit dem Satz von Rouché, dass g und f_1 in $B_2(0)$ die gleiche Anzahl von Nullstellen haben müssen.

(b) Setzen Sie $f_2(z) = 6z$ und zeigen Sie, dass g und f_2 in $B_1(0)$ die gleiche Anzahl von Nullstellen haben.

Aufgabe 8: Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der Polynome im angegebenen Gebiet.

(a) $2z^4 - 5z + 2$ in $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| > 1\}$

(b) $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in $B_1(0)$.

(c) $z^5 + iz^3 - 4z + i$ in $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ 1 < |z| < 2\}$.

Aufgabe 9: Beweisen Sie, dass die folgenden Formeln für $z \in \mathbb{C}$ gelten:

(a) $$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

(b) $$\pi \tan(\pi z) = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z - \frac{1}{2} - n} + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right)$$

(c) $$\frac{\pi}{\cos(\pi z)} = \pi + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{z^2 - (n + \frac{1}{2})^2} + \frac{2}{n + \frac{1}{2}} \right)$$

Aufgabe 10: Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} |a_n| = \infty$ und $q \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{q+1}} < \infty.$$

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$, definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{q-1}}{a_n^q} \right),$$

eine meromorphe Funktion ist.

Hinweis: Betrachten Sie ein Taylorpolynom von $\frac{1}{z - a_n}$ *in* 0 *mit dem Restglied von Lagrange.*

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**