Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2015**

Funktionentheorie
Übungsblatt 12

Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 09. Juli 2015, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte): Untersuchen Sie die folgenden Produkte auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)$, (b) $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)$, (c) $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, (d) $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Aufgabe 2: Zeigen sie, dass

(a) $\pi\tan(\pi z) = 8z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-4z^2}$.

(b) $\cos\left(\frac{\pi z}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi z}{4}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2n-1}z\right)$. *Hinweis:* $\cot\frac{z}{2}-\tan\frac{z}{2} = 2\cot\frac{z}{2}$.

Aufgabe 3 (12 Punkte): Wir suchen eine meromorphe Funktion $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit Nullstellen der Ordnung 2 in $\{k\in\mathbb{N}^+\}$ und derart, dass

$$\lim_{z\to k}\frac{h(z)}{(z-k)^2} = k \text{ für } k\in\mathbb{N}^+.$$

Welche der untenstehenden Funktionsvorschriften erfüllen diese Bedingungen?

(a) $\frac{1}{\sum_{k\in\mathbb{N}^+}\frac{k}{(z-k)^2}}$ (b) $\frac{1}{\sum_{k\in\mathbb{N}^+}\left(\frac{k}{(z-k)^2}-\frac{1}{k}\right)}$ (c) $\frac{1}{\sum_{k\in\mathbb{N}^+}\left(\frac{k}{(z-k)^2}-\frac{1}{k}-\frac{2}{k^2}z\right)}$

(d) $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)^2$ (e) $\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{z}{k}\right)^2 e^{2z/k}\right)$ (f) $\left(\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{z/k}\right)^2$

Aufgabe 4 (4 Punkte): Sei $f: B_1(0)\to\mathbb{C}$ holomorph und $f(0)=0$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ kompakt in $B_1(0)$ konvergiert.

Aufgabe 5: Schreiben Sie $\frac{\sin(z)}{z}$ einerseits als Potenzreihe um 0 und andererseits mit dem Euler-Wallis-Produkt. Zeigen Sie mit der daraus folgenden Identität, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 6: Wir suchen meromorphe Funktionen mit zweifachen Nullstellen in $\{3k; k \in \mathbb{Z}\}$ und Polen von Ordnung 2 in $\{3k+1; k \in \mathbb{Z}\}$. Welche der folgenden Funktionen erfüllen diese Bedingungen?

$$f_1(z) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=-n}^{n} \left(\frac{z-3k}{z-3k-1}\right)^2$$

$$f_2(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \lim_{n\to\infty} \prod_{1\le|k|\le n} \left(\frac{(z-3k)(3k+1)}{(z-3k-1)3k}\right)^2$$

Hinweis: Betrachten Sie erst, ob das Produkt konvergiert.

Aufgabe 7: Wir suchen eine meromorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit Hauptteilverteilung $\left\{\frac{k}{(z-k)^2}\right\}_{k\in\mathbb{N}^+}$. Welche der untenstehenden Funktionsvorschriften erfüllen diese Bedingungen?

(a) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{k}{(z-k)^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^+} \left(\frac{k}{(z-k)^2} - \frac{1}{k}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^+} \left(\frac{k}{(z-k)^2} - \frac{1}{k} - \frac{2}{k^2}z\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{4k^2}{(z^2-k^2)^2}$

Aufgabe 8: Wir betrachten die meromorphe Funktion $m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$m(z) = \frac{1}{\sin(z)} - \frac{2}{\sin(2z)}.$$

Nach dem Satz über die Partialbruchzerlegung lässt sie sich schreiben als

$$m(z) = h(z) + \sum_{l\in\mathbb{Z}} (f_l(z) - g_l(z)),$$

wobei h eine holomorphe Funktion ist, f_l der Hauptteil der Polstelle $z = z_l$ und g_l ein passendes Taylorpolynom.

(a) Welche Polstellen hat m?

(b) Bestimmen Sie die Hauptteile f_l.

(c) Bestimmen Sie die Taylorpolynome g_l so, dass $\sum_{l\in\mathbb{Z}}(f_l - g_l)$ kompakt konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass $h(z) = m(z) - \sum_{l\in\mathbb{Z}}(f_l(z) - g_l(z))$ (bei geschickt gewählten g_l) periodisch in der reellen Richtung ist.

(e) Zeigen Sie, dass h konstant ist.

(f) Wie sieht h aus?

(g) Geben Sie eine Partialbruchzerlegung von m an.

Aufgabe 9: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Es existiere

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Log}(1+\alpha_k)$$

in $\mathbb{C}$. Existiert dann auch

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Log}\left(\prod_{k=0}^{n}(1+\alpha_k)\right)?$$

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**