Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

SS 2015

Funktionentheorie
Übungsblatt 13

Dieses Zusatzblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 16. Juli 2015, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte): Berechnen Sie $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ mit den Mitteln der Vorlesung.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Berechnen Sie $\int_0^\infty 3^{-4x^2}\,dx$.
Hinweis: Gammafunktion

Aufgabe 3 (8 Punkte): Richtig oder falsch? Beweisen Sie ihre Antwort oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei Ω ein Gebiet und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene, stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jede holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

(b) Sei f eine nicht-konstante ganze Funktion und $0 < r_1 < r_2$. Dann gilt

$$\max_{z\in\partial B_{r_1}(0)} |f(z)| < \max_{z\in\partial B_{r_2}(0)} |f(z)|.$$

(c) Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f \cdot g \equiv 1$ in $\mathbb{C}$. Dann müssen f und g konstant sein.

(d) Sei f eine ganze Funktion und $a \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Folge z_n, so dass $f(z_n) \to a$.

(e) Ist f in einem einfach zusammenhängenden Gebiet holomorph, dann hat es eine Stammfunktion.

(f) Jede Möbiustransformation $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ hat einen Fixpunkt $f(z) = z \in \mathbb{C}$.

(g) Es gibt eine biholomorphe Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$.

(h) Es gibt eine biholomorphe Funktion $f : B_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Gibt es eine ganze Funktion, die $\{k, k\}_{k=1}^\infty$ als Nullstellenverteilung hat?

Aufgabe 5: Beweisen Sie die Legendresche Verdoppelungsformel:

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z + \tfrac{1}{2}).$$

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass für $z \neq 0, -1, -2, \dots$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(z+n)}{n^z\Gamma(n)} = 1.$$

Aufgabe 7 (120 Punkte): Beweisen Sie, dass die Euler-Mascheroni-Konstante irrational ist.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**