Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2015**

Funktionentheorie
Übungsblatt 2

Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 23. April 2015, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: (a) ~~Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dz}\,\mathrm{Log}(z) = \frac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.~~

(b) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{Log}(x - i)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(c) Führen Sie eine Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x^2+1}$ für $x \in \mathbb{R}$ durch.

(d) Nutzen Sie (b) und (c) um eine Stammfunktion $F(x)$ von $\frac{1}{x^2+1}$ anzugeben, ohne zu wissen, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(e) Berechnen Sie $F(x) - \arctan(x)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass die Menge der Möbiustransformationen mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe bildet. Ist die Gruppe kommutativ?

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} + \sqrt{n^2+n} - n\right)^{2n+1} z^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\ln(n)} z^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$

Aufgabe 4: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(z-2)^k}{3^k + 5^k}$?

Aufgabe 5: Berechnen Sie

(a) $\mathrm{Log}((-1+i)^2)$ und $2\,\mathrm{Log}(-1+i)$. *Geändert.*

(b) $\mathrm{Log}(zw)$ und $\mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)$ für $z = -4\sqrt{3} - 4i$ und $w = 2 - i2$.

(c) $\mathrm{Log}(\exp(4 + i\frac{16}{3}\pi))$ *Geändert.*

Aufgabe 6: (a) Zeigen Sie, dass $\cosh(x) = \frac{x}{2}$ und $\cosh(x) = -\frac{x}{2}$ keine reellen Lösungen haben.

(b) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $2\sin(z)\cos(z) = \mathrm{Im}(z)$.

Aufgabe 7 (5 Punkte): Man definiert auf $\hat{\mathbb{C}}$ die sogenannte chordale Metrik

$$\chi(z,w) = \begin{cases} \frac{|w-z|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|z|^2}} & \text{für } w, z \in \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ und } w = \infty, \\ \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}} & \text{für } w \in \mathbb{C} \text{ und } z = \infty, \\ 0 & \text{für } z, w = \infty. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Metrik handelt.

(b) Finden Sie eine einfache Darstellung für $B_\varepsilon^\chi(\infty) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \,;\, \chi(z,\infty) < \varepsilon\}$.

(c) Zeigen Sie, dass es sich bei $\hat{\mathbb{C}}$ damit um einen folgenkompakten Raum handelt.

Aufgabe 8 (5 Punkte): Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\cosh(z) - \frac{1}{2}(1-8i)e^{-z} = 2 + 2i.$$

Aufgabe 9 (5 Punkte): Es seien $A = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z + 2i| = 1\}$ und

$$f_a : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \quad \text{mit} \quad f_a(z) = (1-i)z$$
$$f_b : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \quad \text{mit} \quad f_b(z) = \frac{1}{z+i}$$

Skizzieren Sie

(a) $f_a(A)$ (b) $f_b(A)$ (c) $(f_a \circ f_b)(A)$ (d) $(f_b \circ f_a)(A)$

Aufgabe 10: Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen und $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir nehmen an, dass $f'(z) \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\{z \in A \,;\, \mathrm{Im}(f(z)) = c\}$ und $\{z \in A \,:\, \mathrm{Re}(f(z)) = d\}$ für $c, d \in \mathbb{R}$ um Kurven oder die leere Menge handelt. Geändert

(b) Zeigen Sie, dass sich diese Kurven nur rechtwinklig schneiden können.

Aufgabe 11: (a) Beweisen Sie mit elementaren Methoden, dass $\sum_{n=0}^\infty z^n = \frac{1}{1-z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

(b) Geben Sie eine einfache Formel für $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} z^n$ für $|z| < 1$ an.

Hinweis: Ableitung.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**