Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2015**

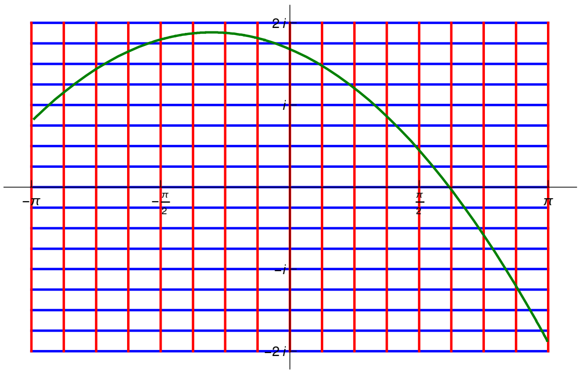
Funktionentheorie
Übungsblatt 4

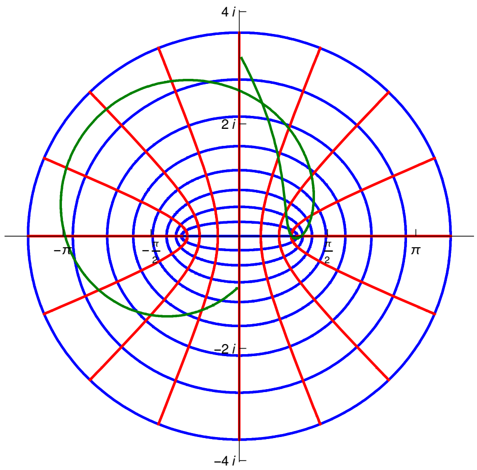
Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, 07. Mai 2015, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Die Sinus-Funktion auf $\mathbb{R}$ ist nicht invertierbar, es sei denn man beschränkt die Funktion auf $[-\pi/2, \pi/2]$. Für $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ gibt es eine inverse Funktion, die man arcsin nennt. Die Sinus Funktion ist auch auf $\mathbb{C}$ definiert durch

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Hier sehen Sie links die Bilder einiger Kurven γ in $\mathbb{C}$ und rechts die Bildkurven $\sin \circ \gamma$.





(a) Zeigen Sie $\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.

(b) Zeigen Sie, dass dieser Sinus als Funktion von $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right) + i\mathbb{R}$ nach $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)$ invertierbar ist.

(c) Wenn wir diese inverse Funktion Arcsin nennen, dann gilt mit $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{\frac{1}{2}i\mathrm{Arg}(z)}$, dass

(i) $\mathrm{Arcsin}(w) = \mathrm{Arg}\left(\sqrt{1-w^2} + iw\right) + i\ln\left|\sqrt{1-w^2} - iw\right|$;

(ii) $\mathrm{Arcsin}(w) = \mathrm{Arg}\left(\sqrt{1-w}\sqrt{1+w} + iw\right) + i\ln\left|\sqrt{1-w}\sqrt{1+w} - iw\right|$;

(iii) $\mathrm{Arcsin}(w) = \mathrm{Arg}\left(\sqrt{w^2-1} + w\right) + \frac{1}{2}\pi + i\ln\left|\sqrt{w^2-1} - w\right|$.

Wahr oder nicht wahr?

Aufgabe 2: (a) Wir definieren $\gamma_1 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ durch

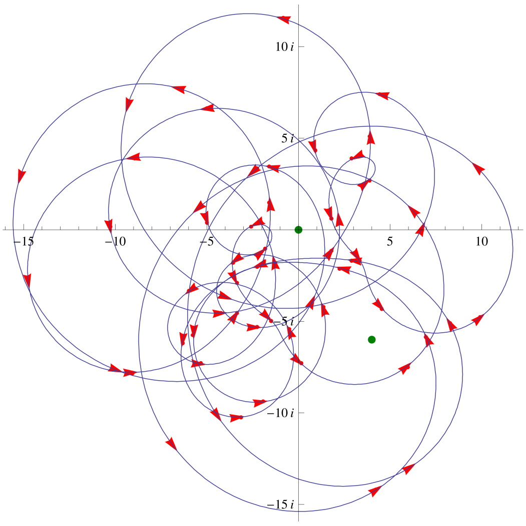
$$\gamma_1(t) = 4e^{7it} + 2e^{10it} - e^{it} + 8\sin(3t)e^{2it} - 2i - 1.3 + (3 + 2i)\cos(\tfrac{t}{2}).$$

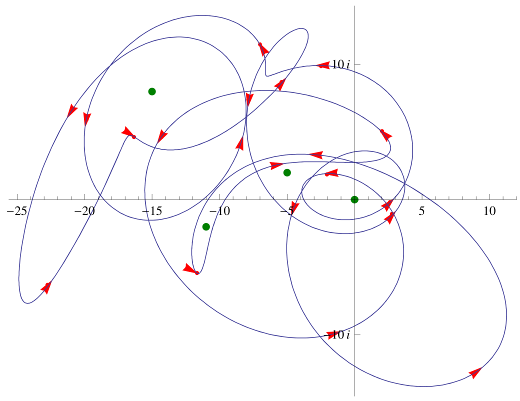
Eine Skizze sehen Sie unten links. Bestimmen Sie die Umlaufzahlen der Punkte $z_0 = 0$ und $z_1 = 4 - 6i$.

(b) Wir definieren $\gamma_2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma_2(t) = 4e^{7it} + 4e^{10i(t+0.87)} - 5e^{it} + 8\sin(3t)e^{2it} - 16\cos(t+0.5)^2 e^{-i\sin(3t)^3} + 2i.$$

Eine Skizze sehen Sie unten rechts. Bestimmen Sie die Umlaufzahlen der Punkte $z_2 = -15 + 8i$, $z_3 = -5 + 2i$, $z_4 = 0$, $z_5 = -11 - 2i$.





Aufgabe 3 (10 Punkte): Sie sollen das folgende Integral berechnen:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^4 + 4} dx \tag{1}$$

mit Hilfe des Satzes von Cauchy.

(a) Berechnen Sie $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ in $\mathbb{C}$ derart, dass

$$z^4 + 4 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4).$$

(b) Zeigen Sie, dass $\displaystyle \frac{1}{z^4 + 4} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{z - z_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{4} \frac{1}{z_k - z_j}$.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \oint_{|z - z_1| = \varepsilon} \frac{1}{z^4 + 4} dz = \frac{2\pi i}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}.$$

Sei nun $\gamma_1 : [-M, M] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) = t$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_2(t) = Me^{it}$.

(d) Zeigen Sie $\displaystyle \lim_{M \to \infty} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^4 + 4} dz = 0$.

(e) Sei $r \in (0, 1)$. Für welche Teilmenge $Z \subset \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ gilt

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{1}{z^4 + 4} dz = \sum_{z_k \in Z} \oint_{|z - z_k| = r} \frac{1}{z^4 + 4} dz.$$

(f) Berechnen Sie $\displaystyle \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{1}{z^4 + 4} dz$ und (1).

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**