Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2015**

Funktionentheorie
Übungsblatt 5
Version 2

Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist aufgrund des Feiertages **Mittwoch, der 13. Mai 2015, um 16 Uhr.**

Aufgabe 1 (5 Punkte): Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gelte $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{f(z)} dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$

Hinweis: Cauchysche Integralformel

Aufgabe 2: Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen mit $a \in A$ und $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ und $g : A \to \mathbb{C}$ seien holomorph.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Res}_a(fg) = g(a) \operatorname{Res}_a(f)$, wenn f eine Polstelle erster Ordnung in a hat.

(b) f habe eine Polstelle n-ter Ordnung in a. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Res}_a(f) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-a)^n f(z)\right).$$

(c) f sei holomorph in A. Es gelte $f^{(n)}(a) \neq 0$ und $f^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, \ldots, n-1$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Res}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = n$.

Aufgabe 3: $A \subset \mathbb{C}$ ist offen, $a \in A$ und die Funktion $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Die zwei Folgen $\{z_n\}, \{w_n\} \subset A \setminus \{a\}$ konvergieren gegen a, aber $f(z_n)$ und $f(w_n)$ konvergieren in $\hat{\mathbb{C}}$ nicht gegen den gleichen Grenzwert.

Beweisen Sie, dass f eine wesentliche Singularität in a hat.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Bestimmen Sie jeweils die Singularitäten und deren Typ. Geben Sie auch die Ordnung der Polstellen an.

(a) $\dfrac{1}{\cos(z)}$ (b) $\dfrac{z}{\sin(z)}$ (c) $\dfrac{1}{1-e^z}$ (d) $\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

Aufgabe 5 (5 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z-4)} dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-4)} dz$

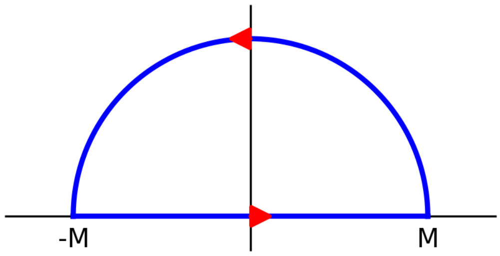
Aufgabe 6: Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} z\sin(\bar{z})dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$

Aufgabe 7 (5 Punkte): Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx.$$

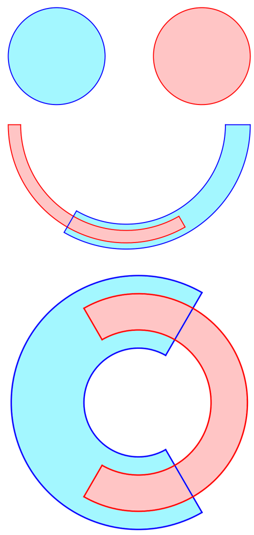
Hinweis: $\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$ *mit dem eingezeichneten* γ.



Aufgabe 8: Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{4}+\sin(t)}dt.$

Hinweis: Nutzen Sie $\sin(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$ *und schreiben Sie dieses Integral als* $\displaystyle\oint_{|z|=1} f(z)dz.$

Aufgabe 9: Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete, also offen und zusammenhängend. Es gelte $\int_{\gamma_i} f dz = 0$ für alle Wege $\gamma_1 \subset G_1$ und $\gamma_2 \subset G_2$.



(a) Zeigen Sie, dass $G_1 \cup G_2$ und $G_1 \cap G_2$ im Allgemeinen keine Gebiete sind.

(b) Zeigen Sie, dass $G_1 \cup G_2$ ein Gebiet ist, wenn $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ ein Gebiet ist.

(c) Sei $G_1 \cap G_2$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_\gamma f dz = 0$ für alle Wege $\gamma \subset G_1 \cup G_2$.

Hinweis: f *hat Stammfunktionen auf den Gebieten* G_1, G_2 *und* $G_1 \cap G_2$.

(d) Zeigen Sie, dass die letzte Aussage falsch sein kann, wenn $G_1 \cap G_2$ kein Gebiet ist.

Aufgabe 10: Skizzieren Sie Niveaumengen des Real- und Imaginärteils von $\exp(z)$.

Aufgabe 11: Wir betrachten die Funktion $f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

(a) Welche Art von Singularität hat f an der Stelle 0?

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Res}_0 \exp(z + \frac{1}{z})$.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**