Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

SS 2015

Funktionentheorie
Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 21. Mai 2015, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z\right)^n$.

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Potenzreihe?

(b) Zeigen Sie, dass diese Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ holomorph fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 2: Wir betrachten die Funktion $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2}z\right)^n$.

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Potenzreihe?

(b) Kann diese Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ holomorph fortgesetzt werden?

Aufgabe 3 (5 Punkte): Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$f(z) = \tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

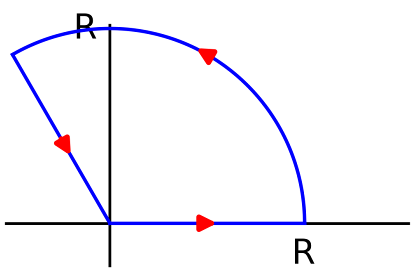
(a) Welcher Konvergenzradius hat die Taylorreihe $t(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$?

(b) Welcher Konvergenzradius hat die Taylorreihe $T(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \frac{1}{n!} t^{(n)}(1)$?

Aufgabe 4 (10 Punkte): Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$$

Hinweis: Integrieren Sie über den abgebildeten Kreissektor mit den Winkeln 0 *und* $\frac{2}{3}\pi$.



Aufgabe 5: Wir definieren $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(z)}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\sqrt{0} = 0$.

(a) Entwickeln Sie f in eine Potenzreihe um den Punkt $-1 + \sqrt{3}i$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(c) Auf welcher Menge stimmt f mit der Potenzreihe überein?

(d) Geben Sie eine holomorphe Fortsetzung der Potenzreihe mit möglichst großem Definitionsgebiet an.

Aufgabe 6: Berechnen Sie die Taylorreihe um $-i$ der Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$, definiert durch $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3}$.

Aufgabe 7: Die Funktion $f : \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \to \mathbb{C}$ sei stetig, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ und holomorph auf $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$g(z) = \begin{cases} \overline{f(\overline{z})} & \text{für } \operatorname{Im}(z) < 0 \\ f(z) & \text{für } \operatorname{Im}(z) \geq 0 \end{cases}$$

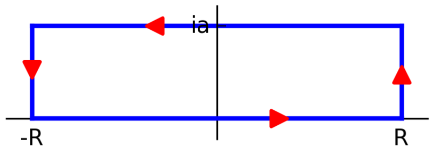
holomorph auf $\mathbb{C}$ ist.

Hinweis: Falls $\oint_{\triangle} g(z)dz = 0$ für jedes Dreieck $\triangle \subset \mathbb{C}$, dann ist g holomorph auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 8:

Berechnen Sie für $a > 0$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(at)dt.$$



Hinweis: Integrieren Sie e^{-z^2} über das Rechteck mit den Eckpunkten R, $R + ia$, $-R + ia$, $-R$.

Aufgabe 9: Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4\cos(t)} dt \text{ und } \int_0^{\pi} \frac{1}{(a + \cos(t))^2} dt$$

Hinweis: $\oint_{|z|=1} f(z)dz$

Aufgabe 10: Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2} dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(x)^2}{1+x^2}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2} dx,\ a > 0$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)^2} dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2} dx,\ a > 0$

(g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{(x^2+1)\sqrt{x}} dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^5} dx$

Aufgabe 11: Wo hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ Pole und wesentliche Singularitäten? Was passiert an der Stelle 0?

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**