Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2015**

Funktionentheorie
Übungsblatt 7

Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist **Mittwoch, der 03. Juni 2015, um 16 Uhr.**

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wir betrachten das Gebiet $H = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. $f : H \to \mathbb{C}$ und $g : H \to \mathbb{C}$ seien holomorph und es gelte $f\left(\frac{i}{n}\right) = g\left(\frac{i}{n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $f(z) = g(z)$ in H?

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Sei $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Es gelte $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ und $f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f(-z) = -f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(B_1(0)) \subset B_1(0)$.

(a) Zeigen Sie, dass $|f'(0)| \leq 1$.

Hinweis: Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel und schätzen Sie geeignet ab.

(b) Es gelte zusätzlich $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $|f(z)| \leq |z|$.

Hinweis: Betrachten Sie $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ und nutzen Sie das Maximumsprinzip.

Aufgabe 4: Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und derart, dass $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty$ für jede Folge $\{z_n\} \subset B_1(0)$ mit $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$.

Wir zeigen nun, dass es eine solche Funktion nicht geben kann.

(a) Zeigen Sie, dass ein solches f nur endlich viele Nullstellen in $B_1(0)$ haben kann.

(b) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{f}$ keine wesentlichen Singularitäten in $B_1(0)$ besitzt.

(c) Seien $p_1, \ldots, p_n$ die Polstellen von $\frac{1}{f}$ mit Ordnung $m_1, \ldots, m_n$. Dann ist

$$g(z) = \frac{1}{f} \prod_{k=1}^{n} (z - p_k)^{m_k}$$

eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass diese Funktion identisch Null sein muss.

Aus (c) folgt, dass f nicht existieren kann.

Aufgabe 5: Sei $\varepsilon > 0$ und $f : B_{1+\varepsilon}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f konstant sein muss, wenn $f(\partial B_1(0)) \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 6: f sei jeweils eine holomorphe Funktion $f : C \to \mathbb{C}$, die kein Polynom ist. Beweisen oder widerlegen Sie, ob es eine solche Funktion f mit der angegebenen Eigenschaft gibt.

(a) $f(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(b) $f(z) = f(z + 1) = f(z + \sqrt{2})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 7: Gibt es jeweils eine holomorphe Funktionen $f_i : B_1(0) \to \mathbb{C}$, die die Eigenschaften für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen?

(a) $f_1(\frac{1}{n}) = f_1(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ (c) $f_3^{(n)}(0) = (n!)^2$ (e) $f_5(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n}$

(b) $f_2(\frac{1}{n^2}) = f_2(-\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2}$ (d) $f_4^{(n)}(0) = \frac{n!}{n^2}$

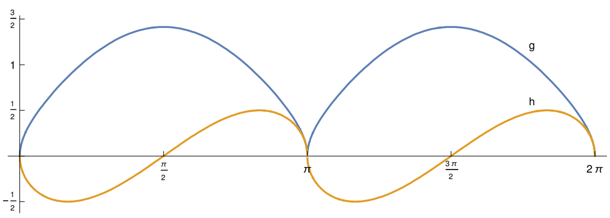
Aufgabe 8: Bestimmen Sie das Maximum von $|f_i|$ auf $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq 1\}$.

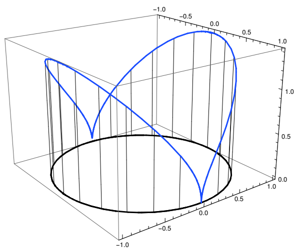
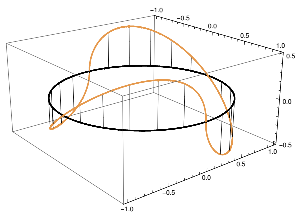
(a) $f_1(z) = \exp(z^2)$ (b) $f_2(z) = \frac{z+2}{z-2}$ (c) $f_4(z) = 3 - |z|^2$ (d) $f_3(z) = z^2 + z - 1$

Aufgabe 9: $f : \overline{B_1\,(0)} \to \mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- $f : B_1\,(0) \to \mathbb{C}$ ist holomorph;
- $f\,(e^{it}) = \sqrt{1 - \cos(2t) - i \sin(2t)}$ für $t \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{z}$ wie üblich definiert auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$.
- $\int_0^{2\pi} f\,(e^{it})\, dt = 2\pi$.

Hier findet man links eine Skizze von $g\,(t) = \mathrm{Re}\,(f\,(e^{it}))$ und $h\,(t) = \mathrm{Im}\,(f\,(e^{it}))$ und rechts das dazugehörige Randverhalten von $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$:



(a) Berechnen Sie $f\,(0)$.

(b) Berechnen Sie $f'\,(0)$. *Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie.*

(c) Zeigen Sie, dass g nicht differenzierbar ist.

(d) Welchen Konvergenzradius hat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}\,(0)\, z^n$?

Aufgabe 10 (3 Punkte): Wir betrachten $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

(a) Bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass u harmonisch ist.

(b) Finden Sie die holomorphe Funktion f, so dass $\mathrm{Re}(f(x + iy)) = u(x, y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 11 (2 Punkte): Gibt es eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, so dass

$$\mathrm{Re}(g(x + iy)) = \frac{x}{x^2 + y^2}?$$

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8905**