Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

SS 2015

Funktionentheorie
Übungsblatt 8
Version 3

Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 11. Juni 2015, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (8 Punkte): Welche Funktionen u_k sind harmonisch auf $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$?

(a) $u_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

(b) $u_2(x,y) = e^x \sin y$

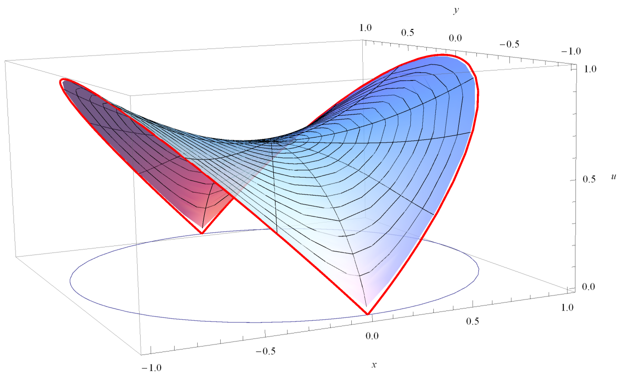
(c) $u_3(x,y) = \frac{xy}{1+2(x^2-y^2)+(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$

(d) $u_4(x,y) = \frac{x^2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$ *Hinweis: MWS*

Aufgabe 2 (5 Punkte): Die Funktion u ist harmonisch auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, stetig auf $\overline{B_1(0)}$ und erfüllt

$$u(\cos(t), \sin(t)) = |\cos(t)| \text{ für } t \in [0, 2\pi].$$

Berechnen Sie $u(0,0)$.



Aufgabe 3: Sei $f : B_{1+\delta}(0) \to \mathbb{C}$ mit $\delta > 0$ holomorph und $f(\partial B_1(0)) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihe von f um 0 in den Punkten $e^{i\theta}$ mit $\theta \in [0, 2\pi)$.

Aufgabe 4: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $h : g(U) \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass $h \circ g$ harmonisch ist.

Sei $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion (auch Vektorfeld genannt). Für die differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $|\gamma'(t)| \neq 0$ definiert man:

- *das Integral über das Vektorfeld in der Tangentialrichtung τ entlang der Kurve durch*

$$\int_\gamma V \cdot \tau ds := \int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Für die Tangentialrichtung gilt $\tau = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$.

- *das Integral über das Vektorfeld in der Normalrichtung n entlang der Kurve durch*

$$\int_\gamma V \cdot n ds := \int_a^b V(\gamma(t)) \cdot n \ |\gamma'(t)|\, dt.$$

Hier muss man festlegen, ob die Normalenrichtung nach rechts bezüglich der Durchlaufrichtung oder nach links bezüglich der Durchlaufrichtung gemeint ist. Es gilt $n_{rechts} = -n_{links}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte): Seien V, γ, τ und n wie oben.

(a) Zeigen Sie $n_{\text{rechts}} = \begin{pmatrix} \tau_2 \\ -\tau_1 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass für $V = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f\right)$ gilt, dass

$$\int_\gamma V \cdot \tau ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und γ eine Jordankurve mit $\gamma([a,b]) = \partial\Omega$ und n die nach außen zeigende Normalenrichtung. Der Satz von Gauß besagt, dass dann

$$\int_\gamma V \cdot n ds = \int_\Omega \nabla \cdot V \ d(x,y). \tag{1}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte): Seien V, γ, τ, n wie oben. Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < x < 1\}$ (ein Dreieck).

(a) Zeigen Sie:

$$\int_\gamma V \cdot n ds = \int_{x=0}^1 -V_2(x,0)\, dx + \int_{y=0}^1 V_1(1,y)\, dy + \int_{t=0}^1 (-V_1(t,t) + V_2(t,t))\, dt.$$

Es gilt mit dem Satz von Fubini-Tonelli, dass

$$\int_\Omega f(x,y) \ d(x,y) = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^x f(x,y)\, dy\right) dx = \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=y}^1 f(x,y)\, dx\right) dy.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega \nabla \cdot V \ d(x,y) = \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=y}^1 \frac{\partial}{\partial x} V_1(x,y)\, dx\right) dy + \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^x \frac{\partial}{\partial y} V_2(x,y)\, dy\right) dx.$$

(c) Zeigen Sie, dass (1) für dieses Dreieck Ω gilt.