Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **SS 2015**

Funktionentheorie
Übungsblatt 9

Dieses Übungsblatt muss in den Übungsbriefkasten Funktionentheorie geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 18. Juni 2015, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Wir haben gesehen, dass die Abbildung $f(z) = z + \frac{1}{z}$, betrachtet als Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}\backslash[-2,2]$$

bijektiv ist. Zeigen Sie, dass für $f : B_1(0) \to f(B_1(0))$ ähnliches gilt.
Welche ist die passende inverse Funktion für $f_{|\mathbb{C}\backslash\overline{B_1(0)}}$ und welche passt zu $f_{|B_1(0)}$?

$$g_1(w) = \tfrac{1}{2}w + \sqrt{\tfrac{1}{4}w^2 - 1} \qquad g_2(w) = \tfrac{1}{2}w - \sqrt{\tfrac{1}{4}w^2 - 1}$$
$$g_3(w) = \tfrac{1}{2}w + i\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}w^2} \qquad g_4(w) = \tfrac{1}{2}w - i\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}w^2}$$
$$g_5(w) = \tfrac{1}{2}w\left(1 + \sqrt{1 - \tfrac{4}{w^2}}\right) \quad g_6(w) = \tfrac{1}{2}w\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{4}{w^2}}\right)$$

Die Wurzelfunktion ist wiederum definiert durch

$$\sqrt{z} = |z|^{1/2} e^{\frac{1}{2}i\arg(z)} \text{ mit } \arg(z) \in (-\pi, \pi].$$

Aufgabe 2: Wir betrachten die Abbildung h, definiert durch

$$z \mapsto ie^{\frac{1}{2}(\mathrm{Log}(iz-1)+\mathrm{Log}(iz+1))}.$$

(a) Zeigen Sie: Auf $\mathbb{C} \setminus i[-1,1]$ ist h wohldefiniert und holomorph.

(b) Zeigen Sie, dass h eine Bijektion von $\mathbb{C} \setminus i[-1,1]$ nach $C \setminus [-1,1]$ definiert. Wie lautet die Umkehrabbildung?

(c) Zeigen Sie, dass auch die Umkehrabbildung holomorph ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Die Abbildung h aus Aufgabe 2 lässt sich als komplexes Potential einer Strömung um eine Wand senkrecht zur Strömungsrichtung auffassen. Diese entspricht dem Schlitz $i[-1,1]$, auf dem h nicht holomorph ist.

(a) Wie lautet das zugehörige reelle Potential F, das die Strömung beschreibt?

(b) Berechnen Sie das Vektorfeld $\vec{v}$, das die Geschwindigkeit der Strömung angibt.

(c) Zeigen Sie, dass die Wand tatsächlich umflossen wird, dass also die Neumann-Randbedingung auf beiden Seiten des Schlitzes erfüllt wird.

(d) Die Funktion $h_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto -z$ ist das Potential einer konstanten Strömung ohne Hindernis. Das zugehörige Vektorfeld sei $\vec{v}_0$. Zeigen Sie, dass die durch h beschriebene Strömung in einiger Entfernung von der Wand einer solchen ungestörten Strömung entspricht, indem Sie nachweisen, dass $\lim_{|z|\to\infty} |\vec{v}(z) - \vec{v}_0(z)| = 0$ gilt.

Aufgabe 4: Skizzieren Sie die Niveau- und Strömungslinien der in Aufgabe 3 untersuchten Strömung. Verwenden Sie dazu gerne ein Computeralgebrasystem.

Aufgabe 5: Die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -2] \cup [2, \infty)) \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \frac{1}{2}z + ie^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-\frac{1}{4}z^2)}$ ist holomorph. Beschreiben Sie die Strömung zum Potential

$$F(x, y) = \operatorname{Re}(g(x + iy)).$$

Aufgabe 6 (5 Punkte): $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist eine offene Menge und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion.

(a) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und konvex. Zeigen Sie, dass $\varphi(u)$ subharmonisch ist.

(b) Zeigen Sie, dass $|\nabla u|^2$ subharmonisch ist.

Aufgabe 7: (a) Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ stetig und f sei holomorph auf $B_1(0)$. Sei $f(B_1(0))$ offen und $f(B_1(0))$ konvex. Zeigen Sie, dass $\partial f(B_1(0)) \subset f(\partial B_1(0))$ gilt.

Hinweis: Wenn eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konvex ist, dann gibt es durch jedes $y \in \partial\Omega$ eine Gerade derart, dass Ω auf einer Seite dieser Gerade liegt:

$$\forall_{y \in \partial\Omega} \exists_{p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \forall_{x \in \Omega} : p \cdot (x - y) \leq 0$$

Man benutze das Maximum-Prinzip für $\operatorname{Re}((p_1 - ip_2)(f(z) - f(y_1 + iy_2))$.

(b) Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ stetig und auf $B_1(0)$ holomorph. Gilt $\partial f(B_1(0)) = f(\partial B_1(0))$?

Aufgabe 8: (a) Welche holomorphen Funktionen $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ erfüllen $\operatorname{Re}(f(z)) \geq |z|$?

(b) Welche ganzen Funktionen erfüllen $\operatorname{Re}(f(z)) \geq \operatorname{Im}(f(z))$?

(c) Für die ganze Funktion f gelte $|f(z)| \leq M\sqrt{|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) \geq 0$. Ist f konstant?

(d) Für die ganze Funktion f gelte $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) \geq 0$. Ist f konstant?

Aufgabe 9 (5 Punkte): Wir betrachten die Funktion $u(x_1, x_2) = \frac{1-x_1^2-x_2^2}{(1-x_1)^2+x_2^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass u harmonisch in $B_1(0)$ ist.

(b) Gilt $u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|y\|=1} u(y) d\sigma_y$?

(c) Gilt $u(0, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{\|y\|<1} u(y) dy$?

Hinweis: Denken statt integrieren.

Aufgabe 10: Beweisen Sie den Satz von Weierstraß-Casorati:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph.

f hat genau dann eine wesentliche Singularität in z_0, wenn für alle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \subset U$ gilt, dass $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ in $\mathbb{C}$ dicht liegt, also der Abschluss der Menge gleich $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 11: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und nicht konstant. Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Gilt sogar $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$?