Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2012/2013

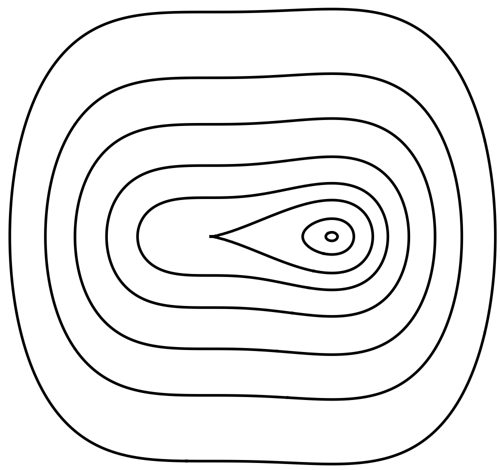
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 10

- Abgabe in den Briefkasten im Container bis spätestens Mittwoch 16:00,
- Abgabe am Donnerstag um 10:00 Uhr im Hörsaal am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1:
Skizzieren Sie die Phasenebene für $u''(t) = 2\cos(u(t)) - 1$.

Aufgabe 2: Wir betrachten die DGL $u''(t) = u(t)^2 - u(t)^3$.

a) Anbei eine Skizze der zugehörigen Phasenebene. Markieren Sie die Gleichgewichtspunkte.



b) κ ist die Kurve mit der Spitze. Berechnen Sie die dazugehörige Gleichung.

c) Für welche Anfangswerte $(u(0), u'(0))$ ist die zugehörige Lösung periodisch?

d) Wenn $(u(0), u'(0)) \in \kappa$, dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \ldots \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} u(t) = \ldots$$

(ergänzen Sie). Ist diese Konvergenz exponentiell oder nur asymptotisch?

Aufgabe 3: Betrachte

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ u(t)^2 - u(t)^3 \end{pmatrix}$$

a) Linearisieren Sie bei den Gleichgewichtspunkten.

b) Von welchem Typ sind diese linearisierten Systeme? Kann man damit etwas über die Stabilität der Gleichgewichtspunkte des urspünglichen Systems sagen?

c) Kann man etwas über die Stabiltät sagen, wenn man Aufgabe 2 im Betracht zieht?

Aufgabe 4: Betrachte

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ u(t)^2 - u(t)^3 - \frac{1}{10}v(t) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $V(u,v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{12}$ in einer Umgebung des Gleichgewichtspunkts $(1,0)$ eine Lyapunov-Funktion ist. Geben Sie eine geeignete Umgebung explizit an.

Aufgabe 5 (0 Pkt.): Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u''(t) = \frac{\sin(u) + u}{e^u}.$$

a) Skizzieren Sie die Phasenebene.

b) Gibt es periodische Lösungen?

c) Für welche Anfangswerte $(u(0), u'(0))$ gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$?

Aufgabe 6 (0 Pkt.): Wir laufen mit 1.5 m/s und ziehen einen Schlitten hinter uns her. Die Position des Schlittens zur Zeit t nennen wir $u(t)$. Das 2 Meter lange Seil benimmt sich, wenn es gespannt ist, wie eine Feder mit Federkonstante c_F und dies bedeutet

$$F_{\text{Ziehen}}(u(t)) = \begin{cases} c_F(1.5t - 2 - u(t)) & \text{wenn } u(t) < 1.5t - 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nehmen $c_F = 1$. Der Schnee klebt ziemlich und sorgt für folgende Reibungskraft des Schlittens:

$$F_{\text{Reibung}}(u'(t)) = \begin{cases} 0.1 & \text{wenn } u'(t) > 0, \\ [0, 0.1] & \text{wenn } u'(t) = 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie das größtmögliche Intervall $[0, t_1]$, in dem sich der Schlitten noch nicht bewegt.

b) Geben Sie die Differentialgleichung an, die zu diesem Problem gehört.

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_+$.