Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2012/2013

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 11

- Abgabe in den Briefkasten im Container bis spätestens Mittwoch 16:00,
- Abgabe am Donnerstag um 10:00 Uhr im Hörsaal am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (5 Pkt.): 1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen gleichmäßig stetig sind.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x\cos(x)$ b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\sqrt[3]{x})$

2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionenfamilien gleichgradig stetig sind.

c) $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2+1}$ d) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2+1}$

Aufgabe 2 (0 Pkt.): Untersuchen Sie, ob die folgende Funktionenfamilie gleichgradig stetig ist.

$$f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + \frac{1}{n}}$$

Aufgabe 3 (0 Pkt.): Für welche Anfangswerte $u(0)$ liefert der Satz von Peano lokal die Existenz einer Lösung?

1. $u'(t) = \cos\left(\frac{1}{u(t)^2}\right)$
2. $\cos(u(t))u'(t) = 1$

Aufgabe 4 (5 Pkt.): Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = -\sqrt[3]{u} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutige Lösung hat. Ist die Lösung auch noch eindeutig, wenn der Anfangswert $u(0) = 0$ gewählt wird?

Aufgabe 5 (5 Pkt.): Was sagt Peano bei der Differentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) = -\sqrt[3]{|u|} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Berechne alle Lösungen und das zugehörige maximale Existenzintervall

Aufgabe 6 (5 Pkt.): Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Es sei außerdem für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $u \mapsto f(x,u)$ fallend.

1. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

eine auf mindestens $\mathbb{R}_+$ existierende Lösung hat.

2. Zeigen Sie, dass die Lösung auf $\mathbb{R}_+$ eindeutig ist.

Aufgabe 7 (0 Pkt.): Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und die Funktion $u \mapsto f(u)$ fallend. Es sei außerdem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit Lipschitz-Konstante L. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(x) = f(u(x)) + g(u(x)) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

eine Lösung besitzt, die zumindest auf ganz $\mathbb{R}_+$ existiert und dort sogar eindeutig ist.
Hinweis: Schreiben Sie $u(x) = e^{Lx} v(x)$.

Aufgabe 8 (0 Pkt.):

1. Definiere die Funktionen $f_n(x) = nx\, e^{-nx}$.
   a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0, \infty)$.
   b) Ist diese Konvergenz gleichmäßig?
   c) Sind die Funktionen gleichgradig stetig auf $[0, 1]$?
   d) Sind die Funktionen gleichgradig stetig auf $[1, \infty)$?

2. Die gleichen Fragen für für $f_n(x) = \frac{n}{x} e^{-\frac{n}{x}}$.
   a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in (0, \infty)$.
   b) Ist diese Konvergenz gleichmäßig?
   c) Ist diese Konvergenz gleichmäßig auf $(0, 1)$?
   d) Sind die Funktionen gleichgradig stetig auf $(0, \infty)$?