Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2012/2013**

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 12
Version 2

- Abgabe in den Briefkasten im Container bis spätestens Mittwoch 16:00,
- Abgabe am Donnerstag um 10:00 Uhr im Hörsaal am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (10 Pkt.): Wir betrachten für $f \in C\,[0,T]$ das Problem

$$\begin{cases} \left(x^2 u'(x)\right)' + \frac{5}{4} u(x) = f(x)\,, \\ u(1) = \alpha \\ u(T) = \beta. \end{cases}$$

1. Berechnen Sie $\nu \in \mathbb{C}$ derart, dass $u(x) = x^\nu$ eine Lösung ist zu
$$\left(x^2 u'(x)\right)' + \tfrac{5}{4} u(x) = 0. \tag{1}$$
2. Geben Sie zwei unabhängige reelle Lösungen zu (1) an.
3. Für welche $T > 0$ hat dieses Problem für alle $f \in C[0,T]$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung?
4. Berechnen Sie eine explizite Lösung für $T = 2$, $\alpha = \beta = 0$ und $f(x) = x^3$.

Aufgabe 2 (5 Pkt.): Berechnen Sie eine Greensche Funktion $G(x,y)$ für

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \text{ und } u'(1) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (5 Pkt.): Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) \text{ und } u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

nur dann eine Lösung hat, wenn

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Zeigen Sie auch, dass es in diesem Fall unendlich viele Lösungen gibt.

Aufgabe 4 (0 Pkt.): Definiere den Differentialoperator L durch

$$(Lu)(x) = u'''(x) - u''(x) + u'(x) - u(x)$$

und betrachte

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(x) \;\text{ für } x \in (0,1)\,, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Zeigen Sie, dass $\{e^x, \sin(x), \cos(x)\}$ ein linear unabhängiges System von Lösungen zu $Lu = 0$ ist.
2. Geben Sie alle Bedingungen für $\alpha(y)$, $\beta(y)$ und $\gamma(y)$ derart, dass

$$G(x,y) = \begin{cases} \alpha(y)\left(e^x - \cos(x) - \sin(x)\right) & \text{für } 0 < x \leq y < 1 \\ \beta(y)\sin(1-x) + \gamma(y)\left(e^{x-1} - \cos(x-1)\right) & \text{für } 0 < y < x < 1 \end{cases}$$

eine Greensche Funktion ist für (2).
3. Zeigen Sie, dass dieses G tatsächlich die einzig mögliche Greensche Funktion für (2) liefert.

Aufgabe 5 (0 Pkt.): Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion $G(x,y)$ für

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)u'(x)\right) + q(x)u(x) = f(x) \text{ für } x \in (a,b) \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

die folgenden Eigenschaften hat:

1. Mit Ausnahme der Stelle $x = y$ erfüllt $x \mapsto G(x,y)$ das Randwertproblem (3) mit $f = 0$.
2. $\lim\limits_{x \downarrow y} \frac{\partial}{\partial x} G(x,y) - \lim\limits_{x \uparrow y} \frac{\partial}{\partial x} G(x,y) = \frac{1}{p(y)}$.

Aufgabe 6 (0 Pkt.): Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x) \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

für jedes $f \in C[0,1]$ genau eine Lösung?

Aufgabe 7 (0 Pkt.):

$$\begin{cases} u''(x) = \cos(u(x)) \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 8 (0 Pkt.): Zeigen Sie, dass das folgende Randwertproblem mindestens eine Lösung hat.

$$\begin{cases} u''(x) = \frac{u(x)^3}{1+u(x)^2} + \sin x \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 0 \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie $u_a(x) = -\sin x + ax$.