Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2012/2013**

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 3

Der Abgabeschluss für dieses Blatt ist Freitag um 10:00. Bitte in die Briefkästen im Inneren des Containers neben der Physik einwerfen, Gebäude 318.

Aufgabe 1: [5 Pkt.] Seien $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Wir wollen das folgende Ergebnis zeigen:

$$AB = BA \Leftrightarrow e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie $\Rightarrow$ mit Hilfe der Definition von e^M für $M \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$.

b) Zeigen Sie $\Leftarrow$ mit Hilfe der zweiten Ableitung $\left(e^{t(A+B)}\right)'' = \left(e^{tA}e^{tB}\right)''$ an der Stelle $t = 0$.

c) Geben Sie $A, B \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Aufgabe 2: [5 Pkt.] Wir setzen $A = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$.

Sind die folgenden Aussagen jeweils richtig oder falsch?

a) $AB = BA$;

b) $e^A e^B = e^B e^A$;

c) $e^A e^B = e^{A+B}$;

d) $e^{nA}e^{nB} = e^{nB}e^{nA}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$;

e) $e^{nA}e^{nB} = e^{nB}e^{nA}$ für alle $n \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: [5 Pkt.] Geben Sie eine explizite Lösung an für

a)
$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ -\pi & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } \vec{x}\,(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b)
$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } \vec{x}\,(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c)
$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } \vec{x}\,(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: [0 Pkt.] Sind die folgenden Funktionen Lösung eines linearen Gleichungssytems erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten? Wenn ja, von welchem System?

a) $\vec{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3\cos(t) + 4\sin(t) & 5\sin(t) \\ -5\sin(t) & 3\cos(t) - 4\sin(t) \end{pmatrix} \vec{v}$ mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$;

b) $\vec{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) - \frac{4}{3}\sin(t) & \frac{5}{3}\sin(t) \\ \frac{5}{3}\sin(t) & \cos(t) - \frac{4}{3}\sin(t) \end{pmatrix} \vec{v}$ mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5: [5 Pkt.] Die Funktionen

$$\vec{x}_a(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t-1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_b(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_c(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind Lösungen von

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2t} & -\frac{1}{2t} \\ -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen für positive Zeiten $t > 0$.