Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2012/2013**

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 4

Abgabeschluss ist donnerstags um 10:00. Bitte in die Briefkästen im Inneren des Containers neben der Physik einwerfen, Gebäude 318.

Aufgabe 1: [5 Pkt.] Berechnen Sie alle Lösungen von:

a) $u''(x) + 3u'(x) - 4u(x) = x + \sin(x)$

b) $u''(x) + 2u'(x) + u(x) = xe^x$

c) $u''(x) - 2u'(x) + u(x) = xe^x$

d) $u^{(\mathtt{v})}(x) = u'(x)$

e) $u^{(\mathtt{viii})}(x) = 16u(x) + e^x \sin(x)$

Aufgabe 2: [0 Pkt.] Suchen Sie alle Lösungen von $x^3y'''(x) + 2x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}^+$. Versuchen Sie $y(x) = x^\alpha$.

Aufgabe 3: [0 Pkt.] Der Satz von Gershgorin besagt, dass für jeden Eigenwert λ der Matrix $(a_{ij}) \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ folgendes gilt:

Es gibt ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ *mit* $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$.

Ist folgendes System stabil?

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} x(t)$$

Aufgabe 4: [5 Pkt.] Sei

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{15}{4} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 4 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \frac{29}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{19}{4} & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist $x'(t) = Mx(t)$ stabil?

Hinweis: Man kann M *wie folgt zerlegen:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Aufgabe 5: [0 Pkt.] Die Matrix $A \in M^{7\times 7}(\mathbb{R})$ hat folgendes charakteristisches Polynom:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^7 - 4\lambda^6 - 2\lambda^5 + 33\lambda^4 + 122\lambda^3 + 196\lambda^2 + 160\lambda$$

Ist $x'(x) = Ax(t)$ stabil?

Aufgabe 6: [10 Pkt.] Wir betrachten die Gleichungssysteme

$$x'(t) = Mx(t) \quad \text{mit}$$

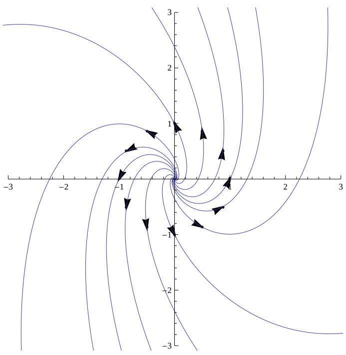
$$M \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right\},$$

und außerdem

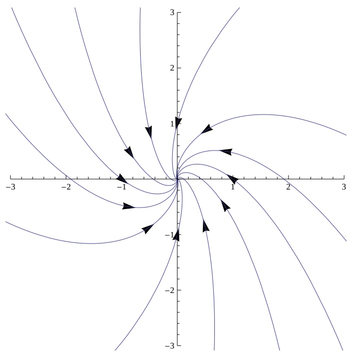
$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t)^2 - x_2(t)^2 \\ -2x_1(t)\,x_2(t) \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1(t)\,x_2(t) \\ x_2(t)^2 - x_1(t)^2 \end{pmatrix}$$

Suchen Sie System und Bild zusammen und geben Sie bei den linearen Systemen die Klassifizierung an. Zu dem Bild, das übrig bleibt: Kann dies zu einem DGL-System gehören?

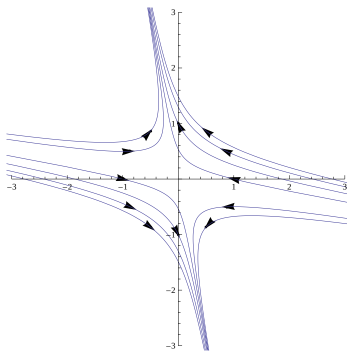
A



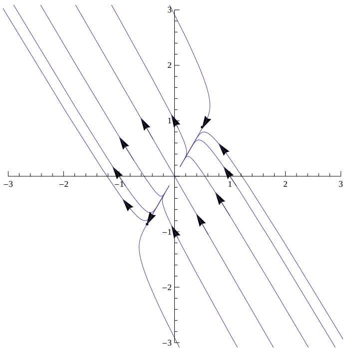
B



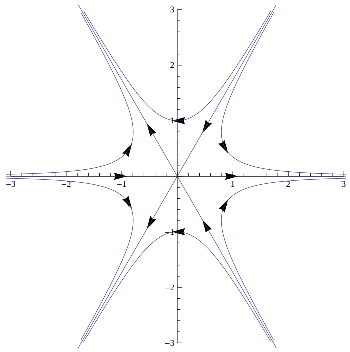
C



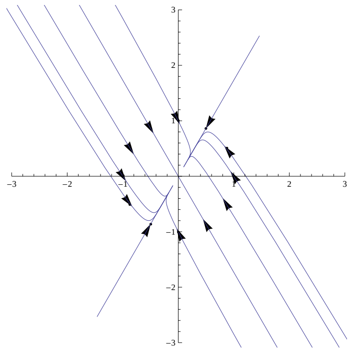
D



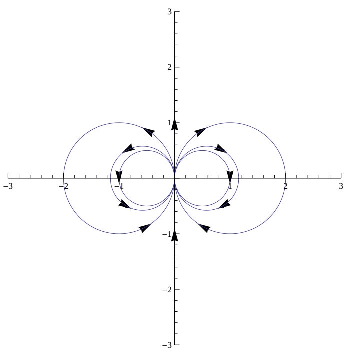
E



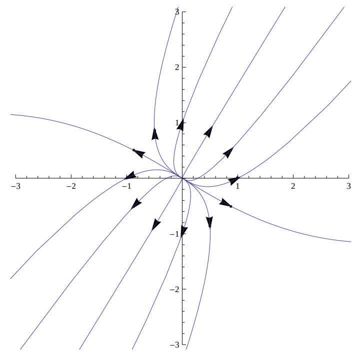
F



G



H



I