Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2012/2013

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 5

Abgabeschluss ist donnerstags um 10:00. Bitte in die Briefkästen im Inneren des Containers neben der Physik einwerfen, Gebäude 318.

Aufgabe 1: [5 Pkt.] Welche Funktionen sind Lipschitz-stetig auf [-M,M]? Geben Sie bei diesen Funktionen jeweils eine mögliche Lipschitz-Konstante an.

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; (iii) $f(x) = \frac{x}{\ln(|x|)}$;
(ii) $f(x) = x^5$; (iv) $f(x) = x\ln(|x|)$.

Hinweis: Bei diesen Funktionen ist die Problemstelle $x = 0$. Die Funktionen sind Lipschitz-stetig auf $[\frac{1}{M}, M]$.

Aufgabe 2: [0 Pkt.] Insbesondere für stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wird die Norm $||f||_2$ definiert durch

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $f \in C([0, 1])$ gilt, dass

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty .$$

b) Zeigen Sie, dass jede Folge in $C([0, 1])$, die bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm konvergiert, dies auch bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm tut.

c) Finden Sie eine Folge von Funktionen aus $C([0, 1])$, die bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm konvergiert, aber nicht bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

d) Ist $\|\cdot\|_\infty$ auch eine Norm für die stetigen Funktionen auf $(0, 1)$?

Aufgabe 3: [5 Pkt.] Gegeben sei das Anfangswertroblem

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & x \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Picard-Iterationen y_1, y_2, y_3, ausgehend von der konstanten Funktion

$$y_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Benutzen Sie das Eulersche Polygonzugverfahren in Vorwärtsrichtung um eine Näherung für die exakte Lösung in $x = 2$ zu bekommen. Verwenden Sie die Schrittweite $h = 1/2$.

Aufgabe 4: [10 Pkt.] Wir betrachten die folgenden Funktionen f_i, definiert auf D_i:

$$
\begin{aligned}
&f_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}, && f_1(x) = x + e^{-x} \\
&f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}, && f_2(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + 1 \\
&f_3 : \{\, z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1 \,\} \to \mathbb{C}, && f_3(z) = \tfrac{1}{2}(z^2 + i) \\
&f_4 : C([0,1]) \to C([0,1]), && (f_4(x))(t) = \tfrac{1}{2}x(t^2) + \tfrac{1}{2} \\
&f_5 : C([0,1]) \to C([0,1]), && (f_5(x))(t) = x(t^2)
\end{aligned}
$$

Dabei sei $\mathbb{R}$ mit dem Betrag als Norm, $\mathbb{C}$ mit dem komplexen Betrag und $C([0,1])$ mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm versehen. Beantworten Sie mit Beweis jeweils folgende Fragen:

a) Gilt $\|f_i(x) - f_i(y)\| < \|x - y\|$ für alle $x, y \in D_i$ mit $x \neq y$?

b) Gibt es ein $L \in (0,1)$, so dass $\|f_i(x) - f_i(y)\| \leq L\,\|x - y\|$ gilt für alle $x, y \in D_i$?

c) Wie viele Fixpunkte hat f_i?

Aufgabe 5: [0 Pkt.] Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$
\begin{cases} y'(x) = x^2 + y(x)^2 & \text{für } x > 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}
$$

In der folgenden Tabelle finden Sie die Approximation mit Euler-Vorwärts und Schrittgröße $h = 0.1$, den numerischen Wert der echten Lösung und die Approximation mit Euler-Rückwärts und Schrittgröße $h = 0.1$.

x_n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\mathbf{y}_n^{EV}$	0	0.001	0.0050001	0.0140026	0.0300222	0.0551123	0.0914161	0.141252
$y(x_n)$	0.000333335	0.00266687	0.00900347	0.0213594	0.0417911	0.0724479	0.11566	0.17408
$\mathbf{y}_n^{ER}$	0.01001	0.0301006	0.0604662	0.101496	0.153864	0.218644	0.297495	0.392934

0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
0.207247	0.292542	0.4011	0.538188	0.711153	0.930727	1.21335	1.58557	2.09298
0.250907	0.350232	0.477617	0.641077	0.85288	1.13311	1.51745	2.07642	2.9728
0.508825	0.651235	0.83015	1.06319	1.38501	1.87752	2.82634	$5. - 2.20532i$	$3.00877 - 5.5376i$

1.8	1.9	2.0	2.1
2.82004	3.9393	5.8521	9.67681
4.68813	9.567	317.722	$----$
$0.0545506 - 5.59868i$	$-1.4387 - 4.34768i$	$-1.88216 - 3.15866i$	$-1.85753 - 2.30306i$

Siehe auch Abbildung 5.2 im Skript.

a) Ist es nicht eigenartig, dass man bei Euler-Rückwärts komplexe Werte findet? Was ist da passiert?

b) Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\mathbf{y}_n^{EV} \leq y(x_n) \leq \mathbf{y}_n^{ER}$$

Hier ist $\mathbf{y}_n^{EV}$ die Euler-Vorwärts Approximation an der Stelle $x_n = nh$, y die echte Lösung und $\mathbf{y}_n^{ER}$ die Euler-Rückwärts Approximation.

c) Die echte Lösung hat ein nach oben beschränktes Existenzinterval (T^-, T^+) mit $T^+ \approx 2.00315$. Kann man das T^+ mit Euler-Vorwärts oder Euler-Rückwärts approximieren? Wie?