Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2012/2013

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 6

Abgabeschluss ist donnerstags um 10:00. Bitte in die Briefkästen im Inneren des Containers neben der Physik einwerfen, Gebäude 318.

Aufgabe 1: [**5 Pkt.**] Arjen Robben verwandelt einen Elfmeter. Die Differentialgleichung, die die Bahn des Balls beschreibt, ist wie folgt:

$$\vec{x}\,''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - c\,|\vec{x}\,'(t)|\;\vec{x}\,'(t)$$

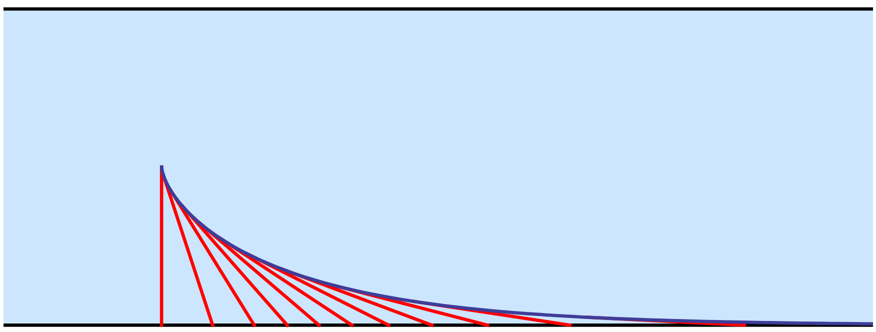
c und g sind positive Konstanten.

a) Schreiben Sie dieses System von Differentialgleichungen als System erster Ordnung.

b) Zeigen Sie, dass die Bedingungen für Picard-Lindelöf erfüllt sind.

c) Wie viele und welche Anfangswerte müssen festgelegt werden, damit Picard-Lindelöf eine eindeutige Lösung liefert?

Aufgabe 2: [**0 Pkt.**] Ein Boot treibt mitten in einem Kanal. Wenn man es vom Ufer her abschleppt, folgt es einer Kurve wie in untenstehender Skizze. Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die diese Kurve beschreibt, und lösen Sie diese. Nehmen Sie dazu an, dass sich das Boot immer in Richtung des Schleppseiles der Länge 1 bewegt und dieses stets straff gespannt bleibt.



Aufgabe 3: [**5 Pkt.**] Wir definieren $T : C[0,1] \to C[0,1]$ durch

$$(Tf)(x) = x + \tfrac{1}{2} f\left(\sqrt{x}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass T genau einen Fixpunkt $\tilde{f} \in C[0,1]$ hat.

b) Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ eine monoton wachsende Funktion ist.

c) Berechnen Sie $\tilde{f}(1)$.

Aufgabe 4: [0 Pkt.] Wir definieren $T : C[0,1] \to C[0,1]$ durch

$$(Tf)(x) = \sqrt{x} f\left(\sqrt{x}\right),$$

Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f_0 \in C[0,1]$ und $f_n := T^n f_0$ gilt:

a) $\|f_n\| \leq \|f_0\|$;

b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x f_0(1)$.

c) Welche Fixpunkte hat T?

Hinweis: Zeigen Sie $f_n(x) = x^{1-2^{-n}} f_0\left(x^{\left(2^{-n}\right)}\right)$ *für* $x \in [0,1]$.

Aufgabe 5: [5 Pkt.] Wir betrachten

$$\begin{cases} x'(t) = 6t\sqrt{x(t)} - t^3, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Picard-Iteration mit $x_0(t) = 0$ keine Lösung liefert.

b) Zeigen Sie, dass $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0(t) = 2t^4$ und

$$x_{n+1}(t) := \int_0^t \left(6s\sqrt{x_n(s)} - s^3\right) ds$$

konvergiert. Ist der Limes eine Lösung des Anfangswertproblems?

c) Ist diese Lösung eindeutig?

Aufgabe 6: [0 Pkt.] Seien A und B in $M^{2\times 2}(\mathbb{R})$. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\vec{x}\,'(t) = \left(A + e^{-t}B\right)\vec{x}(t)$$

Zeigen Sie, dass wenn alle Eigenwerte von A negative Realteile haben, dann gilt für jeden Anfangswert $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$:

a) Die Lösung existiert auf $[0,\infty)$,

b) $\lim_{t\to\infty} \vec{x}(t) = \vec{0}$.

Aufgabe 7: [5 Pkt.] Schneebälle, Mottenkugeln und Bonbons haben wenigstens eines gemeinsam: ihre Volumina V vermindern sich beim Abschmelzen, Verdunsten bzw. Lutschen mit einer zeitlichen Rate, die proportional zu der jeweils noch vorhandenen Oberfläche F ist. Die Proportionalitätskonstante sei $-\lambda$ mit $\lambda > 0$. Sei r_0 der Radius einer gerade ausgelegten Mottenkugel, $r(t)$ ihr Radius nach Ablauf der Zeit t.

a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung, welche die Veränderung des Radius' beschreibt, und lösen Sie diese.

b) Die Mottenkugel habe nach 60 Tagen nur ein Achtel ihres ursprünglichen Volumens. Nach wie vielen Tagen ist ihr Radius auf ein Zehntel seiner Anfangsgröße geschrumpft?