Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2012/2013**

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 8

Der Container neben der Physik, in den die Übungsaufgaben eingeworfen werden, ist in der Regel nur bis zum Ende des Übungsbetriebs geöffnet. Um Störungen bei der Abgabe zu vermeiden, sind wir zu folgender Regelung gekommen:

- Abgabe in den Briefkasten im Container bis spätestens Mittwoch 16:00,
  oder
- Abgabe am Donnerstag um 10:00 Uhr im Hörsaal am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (0 Pkt.): Setze

$$M = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ -1 & 7 & -3 & -7 \end{pmatrix} \text{ und } T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$M = T_1 \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} T_1^{-1} \text{ und } T_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

a) Welche Eigenwerte und Eigenvektoren hat die Matrix M?

b) Finden Sie $T_2 \in M^{4\times 4}(\mathbb{R})$ derart, dass

$$M = T_2 \begin{pmatrix} -4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} T_2^{-1}.$$

Aufgabe 2 (5 Pkt.): Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +y(t) - \left(x(t)^2 + y(t)^2\right) x(t) \\ -x(t) - \left(x(t)^2 + y(t)^2\right) y(t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Linearisieren Sie bei dem einzigen Gleichgewichtspunkt. Ist das lineare System neutral stabil, asymptotisch stabil oder instabil?

b) Zeigen Sie: Für jede Lösung mit $(x(0), y(0)) \neq (0,0)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right) < 0.$$

Ist $(0,0)$ für (1) ein neutral stabiler, ein asymptotisch stabiler oder ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

c) Ändern Sie zwei Vorzeichen in (1) derart, dass $(0,0)$ der einzige Gleichgewichtspunkt bleibt, der dann jedoch instabil ist.

Aufgabe 3 (5 Pkt.): Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(t) - x(t)^2 - 2y(t) \\ x(t) - 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

a) Linearisieren Sie bei dem Gleichgewichtspunkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und klassifizieren Sie das lineare System.

b) Finden Sie eine Basis $\{\vec{\varphi}, \vec{\psi}\}$, mit der das umtransformierte linearisierte System wie folgt aussieht

$$\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{3}$$

c) Wenn wir x und y in dem ursprünglichen System wie folgt ersetzen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha(t)\,\vec{\varphi} + \beta(t)\,\vec{\psi},$$

dann bekommen wir welches System für α und β?

d) Zeigen Sie, dass es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Lösungen α und β des Systems aus c) die folgende Bedingung erfüllen:

$$0 \neq \sqrt{\alpha(0)^2 + \beta(0)^2} < \varepsilon \implies \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\alpha(t)^2 + \beta(t)^2} < 0.$$

Aufgabe 4 (5 Pkt.): Wir betrachten

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x(t) - y(t) + x(t)z(t) \\ 1 - y(t) - z(t) + x(t)y(t) \\ 1 - z(t) - y(t) + y(t)z(t) \end{pmatrix}.$$

a) Ist das um $(1,1,1)$ linearisierte System stabil oder instabil?

b) Ist der Gleichgewichtspunkt $(1,1,1)$ des ursprünglichen Systems stabil oder instabil?
Hinweis: Es gibt Lösungen mit $x = y = z$.

Man kann sich aussuchen, welche der folgenden beiden Aufgaben 5 Punkte geben soll.

Aufgabe 5 (5 Pkt. oder 0 Pkt.): $A \in M^{4\times 4}(\mathbb{R})$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass mit diesen Eigenschaften die Lösungen von $x'(t) = Ax(t)$ eindeutig bestimmt sind. Berechnen Sie diese Lösungen.

Aufgabe 6 (5 Pkt. oder 0 Pkt.): Wir betrachten

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass diese Matrix sowohl ähnlich[1] zu

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \text{ als auch zu } B_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Berechnen Sie $\exp(tB_1)$ und $\exp(tB_2)$ und mit Hilfe einer dieser beiden auch $\exp(tB)$.

1 Lineare Aufgaben

Folgende Aufgaben geben keine Punkte:

Aufgabe 7: Berechnen Sie $\exp(tM)$ für

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8: Wenn

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$x'(t) = TMT^{-1}x(t).$$

Aufgabe 9: Die Funktionen

$$y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ -1+t \\ -1+t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ sind die Lösungen von $y'(t) = My(t)$. Berechnen Sie M.

Aufgabe 10: Die gleiche Frage für

$$y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) - \cos(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) \\ \sin(2t) + \cos(2t) \\ \sin(2t) + \cos(2t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Die Matrizen A und B sind ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix T gibt mit $A = TBT^{-1}$.

Aufgabe 11: Seien $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, dann ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

b) Wenn $A\varphi = \lambda\varphi$, dann gilt $\exp(tA)\varphi = e^{t\lambda}\varphi$.

c) Wenn λ ein Eigenwert von A ist und μ ein Eigenwert von B, dann ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von AB.

d) Setze $c = \max\{|\lambda_i|\,;\lambda_i \text{ Eigenwert von } A\}$. Dann gilt $\|A\| \leq c$.

e) Wenn $A = A^T$ und $B = B^T$, dann gilt $AB = (AB)^T$.

f) Wenn $A = A^T$, dann hat A nur reelle Eigenwerte.

g) Wenn $A = -A^T$, dann hat A nur Eigenwerte in $i\mathbb{R}$.