Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer **WS 2012/2013**

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 9

Der Container neben der Physik, in den die Übungsaufgaben eingeworfen werden, ist in der Regel nur bis zum Ende des Übungsbetriebs geöffnet. Um Störungen bei der Abgabe zu vermeiden, sind wir zu folgender Regelung gekommen:

- Abgabe in den Briefkasten im Container bis spätestens Mittwoch 16:00,
  oder
- Abgabe am Donnerstag um 10:00 Uhr im Hörsaal am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (5 Pkt.): Wir betrachten zwei verschiedene Differentialgleichungssysteme, die beide ein kooperatives Modell beschreiben:

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - x(t) + 2y(t))\, x(t) \\ y'(t) = (2 + 2x(t) - y(t))\, y(t) \end{cases} \tag{1}$$

und

$$\begin{cases} x'(t) = (4 - 2x(t) + y(t))\, x(t) \\ y'(t) = (4 + x(t) - 2y(t))\, y(t) \end{cases} \tag{2}$$

Beschreiben Sie das Langzeitverhalten der Lösungen mit $x(0), y(0) \in \mathbb{R}^+$ bei beiden Systemen. Argumentieren Sie jeweils anhand einer Zeichnung.

Aufgabe 2 (5 Pkt.): Zeigen Sie, dass $V(u,v) = u^4 + v^2$ eine Lyapunov-Funktion ist bei $(0,0)$ für

$$\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(x)^2 - u(x)^3 \\ (u(x)^2 - 1)\, v(x) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (5 Pkt.): Wir betrachten das folgende Lorenz-System für $c \in (0,1)$ und $a, b \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,(y(t) - x(t)) \\ cx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ x(t)y(t) - bz(t) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $V(x,y,z) = x^2 + ay^2 + az^2$ für dieses Lorenz-System eine Lyapunov-Funktion bei $(0,0,0)$ ist.
Unbewertete Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass $(0,0,0)$ auch für $c = 1$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

Aufgabe 4 (5 Pkt.): Das sogenannte *mathematische Pendel* ist ein idealisiertes Fadenpendel, bei dem Reibungskräfte vernachlässigt werden. Für den Winkel $\varphi(t)$, der die Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt t aus der Ruhelage beschreibt, gilt (bei geeigneter Wahl der auftretenden Größen wie Ortsfaktor und Fadenlänge) die Differentialgleichung

$$\varphi''(t) = -\sin(\varphi(t)).$$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System erster Ordnung, indem Sie $x(t) := \varphi(t)$ und $y(t) := \varphi'(t)$ setzen. Zeigen Sie, dass dieses System für jeden Startwert $(x(0), y(0))$ eine eindeutige Lösung besitzt.

b) Berechnen Sie die stationären Punkte des Systems. Wie lassen sich diese interpretieren?

c) Es sei $H(x, y) = -\cos(x) + \frac{1}{2}y^2$. Zeigen Sie: Ist $(x, y) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Systems, dann ist $t \mapsto H(x(t), y(t))$ konstant.

d) Skizzieren Sie die Mengen $M_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; H(x, y) = c\}$ für $c = 0, 1, 2$.

e) Zum Beginn der Bewegung gelte $x(0) = 0$. Zeigen Sie: Ist der „Anfangsschwung“ $y(0)$ genügend klein, dann kommt es beim Pendel nicht zum Überschlag.

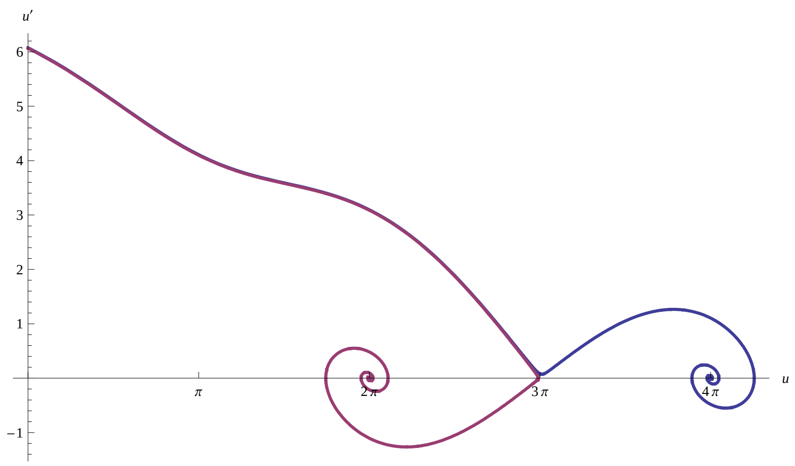
Aufgabe 5 (0 Pkt.): Die Bewegung eines Pendels mit Reibung wird beschrieben durch

$$u''(t) = -\frac{1}{2}u'(t) - \sin(u(t)).$$

a) Zeigen Sie, dass für zwei Lösungen u_a und u_b gilt:

$$|u_a(t) - u_b(t)| \leq e^{\sqrt{2}t}\sqrt{(u_a(0) - u_b(0))^2 + (u_a'(0) - u_b'(0))^2}. \tag{3}$$

Dies bedeutet, dass Lösungen nur langsam auseinander gehen.



b) In der Abbildung sind Trajektorien $\{(u(t), u'(t))\,; t > 0\}$ zweier Lösungen dieser Gleichung mit $u_a(0) = u_b(0) = 0$, $u_a'(0) = 6.065$ und $u_b'(0) = 6.075$ skizziert. Sind diese total unterschiedlichen Trajektorien ein Widerspruch zu (3)?

c) Beschreiben Sie in Worten, was da physikalisch passiert.